Universidad Andina Simón Bolívar

Sede Ecuador

Área de Educación

Maestría en Investigación en Educación

El uso de GeoGebra como herramienta digital para la compresión del aprendizaje de números enteros de octavo de básica de la Institución "Enma Vaca Rojas"

Myrian Yasmin Nole Ortega

Tutor: Miguel Ángel Herrera Pavo

Quito, 2025

Cláusula de cesión de derecho de publicación

Yo, Myrian Yasmin Nole Ortega, autora del trabajo intitulado "El uso de GeoGebra como herramienta digital para la compresión del aprendizaje de números enteros de octavo de básica de la Institución "Enma Vaca Rojas", mediante el presente documento dejo constancia de que la obra es de mi exclusiva autoría y producción, que la he elaborado para cumplir con uno de los requisitos previos para la obtención del título de Magíster en Investigación en Educación en la Universidad Andina Simón Bolívar, Sede Ecuador.

1. Cedo a la Universidad Andina Simón Bolívar, Sede Ecuador, los derechos exclusivos de reproducción, comunicación pública, distribución y divulgación, durante 24 meses a partir de mi graduación, pudiendo por lo tanto la Universidad, utilizar y usar esta obra por cualquier medio conocido o por conocer, siempre y cuando no se lo haga para obtener beneficio económico. Esta autorización incluye la reproducción total o parcial en los formatos virtual, electrónico, digital, óptico, como usos en red local y en internet.
2. Declaro que, en caso de presentarse cualquier reclamación de parte de terceros respecto de los derechos de autor/a de la obra antes referida, yo asumiré toda responsabilidad frente a terceros y a la Universidad.
3. En esta fecha entrego a la Secretaría General, el ejemplar respectivo y sus anexos en formato impreso y digital o electrónico.

14 de noviembre de 2025

Firma: ______________________

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo analizar cómo el uso de la herramienta digital GeoGebra contribuye al desarrollo de habilidades de comprensión y resolución de problemas matemáticos especialmente con números enteros en los estudiantes de octavo año de Educación General Básica de la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”, en Quito. Este estudio nace de los problemas relacionados con las bajas calificaciones de los estudiantes en Matemáticas, especialmente al trabajar con números enteros, y la relevancia de tener un aprendizaje significativo para años superiores fundamentalmente para dominar algebra, ecuaciones, desigualdades, funciones, números racionales, entre otros. Y busca proponer un enfoque didáctico innovador para superar los desafíos planteados por el enfoque tradicional que consiste principalmente en la práctica y la memorización mecánica.

Para este estudio se utilizó un enfoque metodológico de tipo mixto con un diseño preexperimental. Se trabajó con una muestra de 35 estudiantes a los cuales se les aplicó una prueba diagnóstica y después actividades interactivas usando GeoGebra para posteriormente aplicar una posevaluación. Además, simultáneamente se realizaron entrevistas semiestructuradas a cinco docentes de Matemáticas, toda esta información se tuvo en cuenta para el enfoque cualitativo de la investigación.

Las actividades diseñadas permitieron a los estudiantes la interacción con el GeoGebra de una manera constructiva en el sentido de que pudieron manipular virtualmente la recta numérica y operar con señales en contextos reales.

Los resultados mostraron que hay una mejora notable en cuanto a la comprensión de los números enteros. Los errores más comunes, como la confusión al sumar números con diferentes signos o la dificultad para localizar números negativos en la recta numérica, disminuyeron a medida que la intervención tuvo efecto. Además, los profesores mencionaron un aumento en el entusiasmo y la participación de los estudiantes al trabajar con GeoGebra. En resumen, el uso de esta herramienta digital confirma su valor como recurso pedagógico que mejora la formación de un aprendizaje significativo, desarrolla el razonamiento lógico y matemático, y refuerza una actitud más positiva hacia las matemáticas.

Palabras clave: educación, números enteros, GeoGebra, matemáticas, tecnología

Dedico este trabajo a Dios, por ser mi guía, mi fuerza, y por cada paso en este viaje. A mi familia, por su apoyo inquebrantable, por su paciencia y por su amor incondicional, que fueron las fuerzas motrices para completar este logro. A mis maestros y tutor por su conocimiento y por la generosidad y compromiso con los que apoyaron este proceso. Y a mis estudiantes, que son la verdadera motivación para este trabajo, y la razón por la que continúo creyendo en una educación transformadora.

Agradecimientos

Expreso mi más sincero agradecimiento a la Universidad Andina Simón Bolívar, Sede Ecuador, por el espacio académico y los recursos necesarios para llevar a cabo este estudio.

De manera especial, agradezco a mi tutor, Mgtr. Miguel Herrera Pavo, por su guía, acompañamiento y las numerosas sugerencias que enriquecieron cada etapa de este trabajo.

A la Institución Educativa "Enma Vaca Rojas", y especialmente a los directores, maestros y estudiantes, gracias por recibirme y por el ambiente de colaboración y enseñanza en el que pude realizar esta investigación.

A mi familia, gracias por ser el pilar más importante en mi vida. Gracias a su apoyo, comprensión y constante aliento, pude mantener mi motivación y completar con éxito este proceso académico.

Tabla de contenidos

Figuras y tablas

Siglas y abreviaturas

TIC	Tecnologías de la información y la comunicación
TAC	Tecnologías del aprendizaje y del conocimiento
ZDP	Zona de desarrollo próximo
EGB	Educación General Básica
U.E.	Unidad Educativa
UASB	Universidad Andina Simón Bolívar
OCDE	Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico
PISA	Programme for International Student Assessment (Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes)
Mgtr.	Magíster
GeoGebra	Geometría + Álgebra + Cálculo + Estadística (Software interactivo para la enseñanza de las matemáticas)
STEM	Science, Technology, Engineering and Mathematics (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas)
OEI	Organización de Estados Iberoamericanos
UNAE	Universidad Nacional de Educación (Ecuador)
MVP	Modelado, visualización y programación
ZDP	Zona de desarrollo próximo (concepto de Vygotsky)
EBS	Educación Básica Superior

Introducción

Este capítulo describe la fundamentación del problema de estudio y establece el punto de partida de la investigación. Describe el contexto educativo en el que surge la necesidad de fortalecer la enseñanza de los enteros, presenta las dificultades observadas en los estudiantes y revisa las herramientas digitales utilizadas en el aprendizaje de las matemáticas. Además, se formula la pregunta de investigación, se justifica la relevancia del trabajo y se plantean los objetivos generales y específicos que guían el desarrollo de la propuesta. De esta manera, este capítulo proporciona el marco inicial que incorpora la relevancia y el alcance del estudio sobre el uso de GeoGebra como material de enseñanza en la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”.

Las matemáticas ocupan un lugar clave en la escuela, porque trabajan el pensamiento lógico, la forma de resolver problemas y el modo en que se detectan patrones en lo que nos rodea. Esas herramientas sirven tanto en clase como en actividades diarias y, más adelante, en cualquier trabajo que el alumno elija. Pese a su importancia, enseñar mates bien sigue siendo complicado, sobre todo cuando toca explicar conceptos muy abstractos, como los números enteros.

Varios estudios han mostrado que, con el tiempo, un porcentaje importante de alumnos sigue teniendo dificultades en matemáticas, y gran parte de esa brecha se debe a clases que se concentran en repetir y memorizar. Ese método antiguo deja poco espacio para que el estudiante participe de verdad y entienda los conceptos a fondo. Boaler y Dweck (2016) advierten que ese tipo de enseñanza puede apagar el interés y la motivación, y así se arma un ciclo de bajo rendimiento y frustración.

El mundo que quedó después de la pandemia multiplicó las dificultades ya conocidas en las aulas. Pasar de golpe a clases por Zoom, unido a la escasez de dispositivos, poca formación de los profesores y conexiones débiles perjudicó el aprendizaje de muchos niños y jóvenes. Como resultado, se observó una caída notable en las calificaciones, sobre todo en materias más abstractas, como Matemáticas (García-Peñalvo et al. 2021). Ante esta realidad, surge la urgencia de renovar las viejas tácticas de enseñanza e introducir recursos digitales interactivos que ayuden a aprender de forma más profunda y relevante.

Ecuador viene luchando desde hace tiempo con resultados muy bajos en matemáticas dentro de su sistema escolar. El Informe PISA 2018 mostró que nuestros estudiantes quedaron por debajo del promedio de los países de la OCDE, lo que evidencia problemas profundos en la forma en que se enseña y se aprende esa materia. La situación ha sido comentada también en el diario El Universo (2019), que subraya cuán urgente es que se usen estrategias pedagógicas nuevas si queremos cambiar este rumbo.

Investigaciones recientes de Huamani Yauri (2022) revelan que, aparte de los huecos en la comprensión de conceptos, la baja motivación, la ansiedad ante la materia y el escaso manejo de herramientas digitales influyen negativamente en el rendimiento estudiantil. Asimismo, el uso restringido de recursos visuales y digitales, junto con la escasa relación que se establece entre los contenidos y las experiencias cotidianas de los alumnos, alimenta una enseñanza de las matemáticas desconectada de la realidad del estudiante.

A nivel local, estas dificultades también se evidencian en la Institución Educativa "Enma Vaca Rojas", ubicada en la ciudad de Quito. De acuerdo con las evaluaciones internas realizadas en el segundo trimestre del año lectivo 2023-2024, el 39% de los estudiantes de Educación General Básica Superior (35 de octavo año) obtuvo calificaciones inferiores a 7,00 en Matemáticas. Los docentes han observado que uno de los contenidos con mayor grado de dificultad es el manejo de los números enteros. Esto incluye problemas para comprender el valor y uso de los números negativos, ubicarlos en la recta numérica, y aplicar operaciones básicas en contextos de resolución de problemas.

Además de los obstáculos mentales, muchos alumnos llegan a clase con una actitud negativa hacia la materia. La desmotivación, el miedo a fracasar y la poca fe que tienen en lo que pueden hacer alimentan esa postura. Además, el uso casi exclusivo de métodos tradicionales, que repiten patrones mecánicos y apenas conectan con el mundo real, ha frenado aprendizajes más significativos.

El uso de tecnologías digitales en la educación ha tomado protagonismo en las últimas décadas, especialmente en áreas como las matemáticas, donde la abstracción de conceptos requiere estrategias pedagógicas más efectivas. En este contexto GeoGebra se posiciona como una de las tecnologías más innovadoras y efectivas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

GeoGebra es un software interactivo gratuito y multiplataforma que integra de manera dinámica álgebra, geometría, cálculo, estadística y aritmética en una única interfaz. GeoGebra permite la construcción de gráficos, la manipulación de objetos, el modelado y la verificación de resultados, lo que convierte al aprendiz en un participante activo. Junto a esto, el carácter intuitivo de la tecnología permite que usuarios sin conocimientos previos, tanto instrucción como aprendiz, se involucren sin necesidad de habilidades complejas en programación o tecnología.

Al igual que con otras herramientas tecnológicas con GeoGebra también es posible ofrecer una mayor flexibilidad en la enseñanza, como sucede con otras herramientas de tecnología educativa. GeoGebra permite, para el nivel de educación primaria, la visualización y manipulación de los enteros, operaciones y su ubicación en la recta numérica, siempre que se elijan adecuadamente las estrategias pedagógicas. Estas visualizaciones interactivas dan el beneficio de la comprensión, al hacer que los estudiantes puedan ver el resultado de una operación o el comportamiento de una función a medida que se realizan estas acciones. GeoGebra también permite el autoaprendizaje, dado que los estudiantes pueden explorar, experimentar y construir conocimiento de forma independiente, adaptando su ritmo de aprendizaje a lo que requieren.

En el marco internacional y nacional, existe una amplia bibliografía sobre el uso pedagógico de GeoGebra en clase. Estas pruebas se basan en la evidencia incorporada con Cruz et al (2020) quienes con su aplicación comprobaron que el rendimiento académico en Matemáticas era favorable utilizando GeoGebra, con mayor motivación e interacción en el aula. Esta investigación comprobó que los estudiantes no solo dominaban los contenidos. También había un cambio en la actitud de los estudiantes, más positiva hacia el área.

De manera auxiliar, Holguín et al. (2020) enfatizan que el uso de GeoGebra permite el establecimiento de conexiones significativas entre la teoría y la práctica. Su estudio demostró que los estudiantes están más comprometidos cuando pueden manipular el contenido, lo que lleva a una mejor retención y fomenta el pensamiento crítico y el razonamiento lógico-matemático.

Cacao et al. (2023) también señalan que el uso de herramientas de Enseñanza y Aprendizaje con Tecnología (TAC) como GeoGebra ayuda a convertir los entornos de aprendizaje tradicionales en entornos activos y constructivos. Su estudio observó una mejora particularmente notable en la comprensión de los conceptos matemáticos con estudiantes que tenían un historial de bajo rendimiento académico.

Para el caso de la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”, estas evidencias son particularmente significativas. Como se mencionó, existen, en este caso, problemas motivacionales y conceptuales respecto al aprendizaje de los enteros. Estos problemas se pueden abordar directamente con el uso de GeoGebra como recurso didáctico, ya que ofrece la interfase gráfica y operativa de los enteros, mejorando así la comprensión de los estudiantes. Además, GeoGebra crea una atmósfera más positiva y estimulante que podría aliviar la apatía y desconexión que los estudiantes sienten hacia las matemáticas.

En otras palabras, los documentos revisados demostraron que el uso de GeoGebra no solo mejora las habilidades matemáticas, sino que también mejora la experiencia educativa al fomentar un aprendizaje verdaderamente sustancial y relevante que satisface las demandas pedagógicas del siglo XXI. Esta perspectiva aborda de manera eficiente los desafíos identificados dentro del contexto educativo de la región y tiene un impacto significativo en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética de enteros.

La necesidad de adaptar la enseñanza de Matemáticas en la institución “Enma Vaca Rojas” es urgente. De la situación antes descrita, resulta prioritario atender las dificultades que tienen los alumnos con los números enteros. Para que logren un entendimiento profundo del concepto y la resolución de un conjunto de problemas, es indispensable que diseñe y aplique estrategias que permitan a los estudiantes superar los problemas que enfrentan.

La implementación de plataformas digitales, en este caso GeoGebra, me ofrece la oportunidad de utilizar una estrategia diferente en la enseñanza de las Matemáticas. GeoGebra facilita la visualización y manipulación de ideas que en muchas ocasiones son abstractas y esto promueve un aprendizaje activo, situado, flexible y motivador. Cacao et al. (2023) y muchas otras investigaciones dan cuenta que tecnologías como las que GeoGebra ofrece, mejoran las habilidades matemáticas en estudiantes pese a la ausencia de tecnologías, como fue la experiencia en Ecuador durante la pandemia.

En este caso, la investigación planteada busca estimar la influencia que tiene GeoGebra en la enseñanza de los enteros, considerándose la comprensión conceptual, la habilidad en la resolución de problemas y, por último, el desempeño en los resultados académicos de los estudiantes.

Con este antecedente se plantea la siguiente pregunta. ¿Cómo contribuye el uso de la herramienta digital GeoGebra al desarrollo de habilidades de comprensión y resolución de problemas matemáticos con números enteros en los estudiantes de octavo de Educación General Básica de la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”?

Esta investigación tiene como objetivo establecer si GeoGebra supera las barreras que imponen los enfoques tradicionales y mejora la experiencia de aprendizaje activa, colaborativa y significativa. Además, busca analizar cómo afecta la motivación, la implicación y el rendimiento de los estudiantes en Matemáticas, lo que a su vez ayuda a construir una educación matemática efectiva y adaptativa a las demandas del siglo XXI.

La institución educativa "Enma Vaca Rojas" es donde se contextualiza esta investigación. Aquí observamos que hay un porcentaje significativo de estudiantes de Básica Superior que presentan dificultades en Matemáticas, sobre todo en la comprensión y manejo de números enteros. Lo más preocupante de este fenómeno es que, además de perjudicar el rendimiento escolar, se bloquea el desarrollo de importantes razonamientos, la toma de decisiones y el manejo de la resolución de problemas, los cuales son fundamentales en el currículo nacional y en la vida cotidiana.

La presente investigación pedagógica ofrece la posibilidad a la institución, por primera vez, de incorporar el uso de nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza en el área de Matemáticas. GeoGebra, por su alta interactividad, ofrece la posibilidad de incorporar motivación en el aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Básico y, al mismo tiempo, ayuda en la comprensión de los aprendizajes más difíciles.

Desde la perspectiva del docente, la investigación en la educación crea valor, especialmente en la aplicación de estrategias de enseñanza que diferencian de la enseñanza tradicional, evitando la educación repetitiva o memorística. GeoGebra facilita a los docentes la posibilidad de adoptar enfoques más activos, visuales e indagadores, exploratorios que favorecen el aprendizaje significativo y la autodirección del alumno. También, estimula el desarrollo profesional del docente al incentivar la integración de tecnologías educativas en su práctica cotidiana.

Desde el enfoque en el desarrollo de competencias, esta propuesta se centra en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y la resolución de problemas, habilidades que, a pesar de tener un énfasis en Matemáticas, inciden en el desempeño integral del alumno en otras asignaturas y contextos. También se relaciona con los principios del aprendizaje activo y colaborativo, los cuales son el fundamento de las pedagogías contemporáneas.

La investigación actual aborda la transformación digital en la educación, la inequidad en el acceso a materiales didácticos y la formación de estudiantes para el siglo XXI. La propuesta de usar GeoGebra, un software educativo gratuito y accesible, permite la inclusión y equidad en la enseñanza y puede ser aplicado en otras instituciones, independientemente de sus recursos.

La descripción fusionada aún cumple con los requisitos. Desde esta perspectiva, la relevancia para el marco institucional y pedagógico del estudio deriva de la necesidad de innovación dentro del contexto más amplio que rodea la enseñanza de las matemáticas.

Por consiguiente, la investigación tiene como objetivo primordial analizar cómo el uso de la herramienta digital GeoGebra contribuye al desarrollo de habilidades para la resolución de problemas matemáticos con números enteros en estudiantes de octavo año de Educación General Básica de la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”. Proponiendo de manera específica identificar las principales dificultades que enfrentan los estudiantes de Educación Básica Superior de la Institución “Enma Vaca Rojas” en la comprensión y uso de los números enteros. Diseñar e implementar actividades didácticas centradas en la enseñanza de los números enteros utilizando GeoGebra como recurso de apoyo. Analizar las variaciones en el rendimiento académico de los estudiantes antes y después de utilizar GeoGebra como herramienta didáctica para la enseñanza de los números enteros. Describir cómo la integración de GeoGebra en las clases de Matemáticas puede favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje y el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de Educación Básica Superior.

Capítulo primero
Marco teórico

En este capítulo se presentarán los fundamentos conceptuales y pedagógicos que justifican la investigación. Se realizará una revisión de la literatura de investigación tanto a nivel nacional como global en torno al uso de la tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas, particularmente el uso de GeoGebra como recurso didáctico. Asimismo, se considerarán las teorías de aprendizaje más relevantes, en particular las de Piaget, Vygotsky y Ausubel, en conexión con el desarrollo del pensamiento matemático crítico. Así, el marco teórico justifica las bases académicas necesarias para entender cómo el uso de instrumentos digitales puede mejorar la comprensión de los números enteros y guiar las prácticas docentes hacia metodologías más activas, significativas y colaborativas.

1. Antecedentes

El ámbito de la Educación Básica enfrenta el reto de enseñar números enteros, ya que hay que tratar de hacer accesibles para los estudiantes las nociones más abstractas. En los últimos años, se ha investigado en qué medida recursos como GeoGebra cumplen con esta función gracias a los audiovisuales que ayudan a comprender mejor las operaciones matemáticas abstractas. Esta herramienta no solo permite representar gráficamente sumas, restas o multiplicaciones, sino que también pueden realizar operaciones cognitivas con esos conceptos lo cual les dota de motivación y un aprendizaje más profundo. Este tipo de investigación se deriva de míos pero centrados en Quito contribuyendo tanto al escenario local como al debate académico internacional.

Investigaciones realizadas en todo el mundo apoyan los impactos positivos de GeoGebra. Por ejemplo, en Indonesia, Putra et al. (2025) utilizaron un diseño instruccional basado en juegos con GeoGebra para enseñar operaciones enteras a estudiantes de sexto grado. Notaron mejoras significativas en la comprensión de marcos conceptuales junto con un aumento en la motivación hacia las matemáticas. En Rumania, Radović et al. (2018) crearon un e-book interactivo que presentaba applets de GeoGebra, y reportaron ganancias notables no solo en el rendimiento académico y la retención del conocimiento, sino también en la disposición hacia las matemáticas y el aprendizaje electrónico entre los estudiantes.

Por otro lado, Ziatdinov y Valles (2022) señalaron a través de su análisis del Entorno GeoGebra que la combinación de modelado, visualización y programación (MVP) promueve la educación STEM. Han demostrado que esto es muy efectivo para varias ramas de las matemáticas como el álgebra y la geometría, así como para muchas otras materias.

En América, y en particular en Ecuador, ha habido experiencias importantes con GeoGebra. Morales Figueroa (2022) de Cuenca documentó una experiencia aplicando recursos interactivos para operaciones aritméticas en el conjunto de los enteros, donde el rendimiento de los estudiantes mejoró del 22 % al 81 % después de 16 semanas de trabajar con GeoGebra. También en la región, UPEC (2024) presentó un proyecto de investigación bajo la supervisión de Taya Cuzco en instituciones de Educación Secundaria Básica que informó que el 77 % de los estudiantes mejoró la comprensión de las matemáticas a nivel de grado utilizando el software educativo a lo largo del tiempo. Estos estudios demuestran no solo el hecho de que tal software mejoraría los conceptos matemáticos de los estudiantes, sino que también aumentaría su motivación e interés hacia las matemáticas.

Ortiz (2023), menciona en su estudio realizado en México, observó que el uso de GeoGebra mejoró de forma significativa el entendimiento de los estudiantes acerca de la comprensión de los temas aritméticos matemáticos, particularmente en la identificación de patrones numéricos, la interpretación de la multiplicación como área y la representación geométrica de la división. Además, el autor examinó un incremento significativo en la participación emocional y cognitiva de los estudiantes, lo que implica que un entorno amigable y dinámico del software favorece tanto el entendimiento conceptual como el involucramiento activo durante el aprendizaje.

A nivel local en Quito, aunque la literatura especializada que trate específicamente sobre números enteros es escasa, hay un interés notable que puede ser aprovechado. Universidades como la UNAE junto con la OEI han impulsado el uso de GeoGebra en Cálculo y Álgebra, lo cual ha mejorado la automotivación y regulación del aprendizaje en esos niveles. Del mismo modo, la conectividad existente en las escuelas y el desarrollo profesional del profesorado en los cursos de tecnologías educativas crean contextos que son altamente favorables para trabajos como el de este estudio. Así pues, el alcance de su utilización geográficamente se encuentra en Cuenca, donde se desea completar lo aprendido allí e igualmente vincularse a las políticas nacionales sobre enseñanza de matemáticas mediadas por tecnologías.

Sobre esta línea argumentativa es posible justificar que existe un vacío institucional-documental sistemático sobre GeoGebra y sus efectos a nivel microeducacional casero como enseñanza básica. Asumiendo tal afirmación, podemos comunicar nuestros resultados a partir no solo de locales, sino incluso pensando también a nivel global desde otras regiones latinoamericanas al proponer otros enfoques innovadores a los docentes cesantes de otras partes del mundo sobre la prueba GeoGebra para después plantear conclusiones sólidas dentro del ámbito docente-quiteño.

2. Teorías del aprendizaje

2.1. Teoría del constructivismo de Jean Piaget

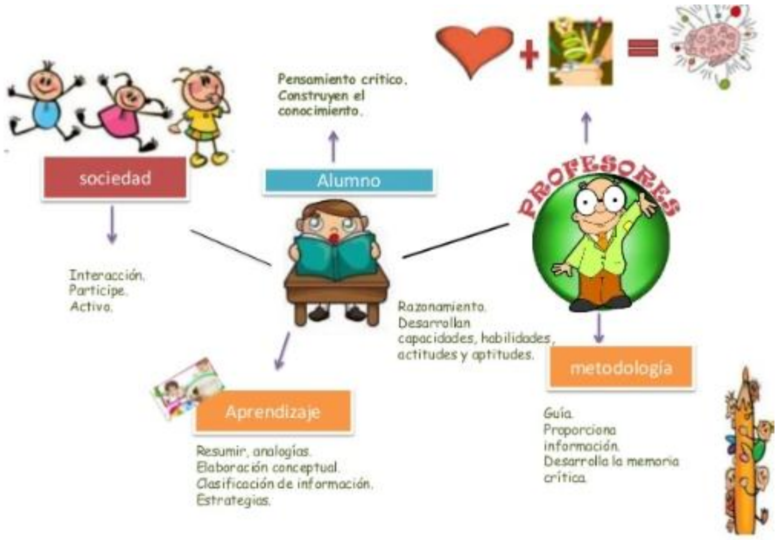


Figura 1. Modelo pedagógico constructivista: el estudiante como protagonista del aprendizaje
Fuente: Ministerio de Educación del Ecuador. (s. f.) https://static.wikia.nocookie.net/teoriasaprendizaje/images/5/58/Tradicional-vs-constructivismo-3-638.jpg/revision/latest?cb=20170911174207&path-prefix=es

La teoría constructivista de Jean Piaget ha sido uno de los ejes centrales en el análisis del desarrollo cognitivo de niños y adolescentes, sobre todo en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas. Según Piaget, el conocimiento no se entrega de manera pasiva, sino que es elaborado activamente por cada individuo en función de su interacción con el entorno mediante procesos de asimilación y acomodación (Piaget 1972). Este modelo del aprendizaje como un proceso constructivo explica por qué los alumnos deben relacionarse de forma activa con los conceptos matemáticos a fin de alcanzar una comprensión real y cabal.

Dentro del marco de su teoría, Piaget sugirió cuatro etapas del desarrollo cognitivo: sensoriomotor, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales. Para los alumnos en Educación Básica Superior, generalmente de 12 a 13 años, los primeros suelen dominar durante la etapa de operaciones formales y el pensamiento racional alcanza un mayor grado de abstracción. A este nivel, los estudiantes son capaces de entender conceptos complejos como enteros, sus relaciones, así como sus representaciones simbólicas y espaciales. Sin embargo, esta habilidad no se activa automáticamente; requiere una pedagogía específica que fomente la reflexión, la exploración y la resolución de problemas dentro de contextos significativos (Case 1992).

De esta manera, el papel activo del estudiante como constructor de conocimiento matemático es muy importante. En lugar de memorizar reglas o procedimientos, el estudiante debe trabajar con conceptos, buscar patrones y formar conexiones. Comprender los enteros requiere más que la enseñanza directa; entender su posición en la recta numérica, el concepto de negatividad y cómo realizar operaciones con ellos necesita más que instrucción: necesita oportunidades para la experimentación donde los errores puedan ser productivos (Kamii y Dominick 1998).

En este caso, es fundamental comprender la relevancia de herramientas como GeoGebra. Permite realizar operaciones de manera visual, lo que facilita trabajar con enteros, donde se pueden arrastrar puntos a lo largo de una recta numérica y ver, en tiempo real, los efectos de sumar o restar un valor positivo o negativo. Al involucrarse activamente con estos conceptos, los estudiantes no son simplemente observadores pasivos; participan activamente en su desarrollo cognitivo, lo que resuena con los principios constructivistas. De esta manera, GeoGebra actúa como un mediador para el aprendizaje significativo, no porque reemplace al profesor, sino porque permite al aprendiz experimentar y reorganizar su pensamiento abstracto sobre conceptos matemáticos (Artigue 2002).

Al final, la teoría de Piaget sustenta la necesidad de diseñar ambientes en los que sea posible desarrollar el razonamiento abstracto por medio de la acción, y el empleo de GeoGebra se muestra como un recurso idóneo que potencia esta construcción activa del conocimiento, sobre todo en lo que respecta a los números enteros.

Desde la visión de Piaget, aprender matemáticas no se trata simplemente de memorizar reglas, sino de construir significado a través de la acción, del ensayo, del error y de la reflexión. En las aulas de la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”, muchos estudiantes no logran comprender bien los números enteros no porque carezcan de capacidad, sino porque rara vez se les brinda la oportunidad de experimentar con ellos, de ver cómo funcionan más allá del papel. Aquí es donde GeoGebra se convierte en algo más que una herramienta digital: se vuelve un espacio donde los alumnos pueden jugar con los números, mover puntos en la recta numérica, probar qué pasa si suman un negativo, y ver el resultado en tiempo real. Esa experiencia activa les permite apropiarse del conocimiento, no solo repetirlo. El aprendizaje ya no es algo que se recibe; es algo que se vive. Tal como lo proponía Piaget, es en ese proceso de exploración, donde el estudiante se siente protagonista, que realmente se despierta el pensamiento abstracto y se forma una comprensión duradera. GeoGebra, en este sentido, no sustituye al maestro, pero sí abre un camino más cercano, más tangible y más significativo hacia lo que se quiere enseñar.

2.2. Teoría del Aprendizaje Sociocultural de Lev Vygotsky

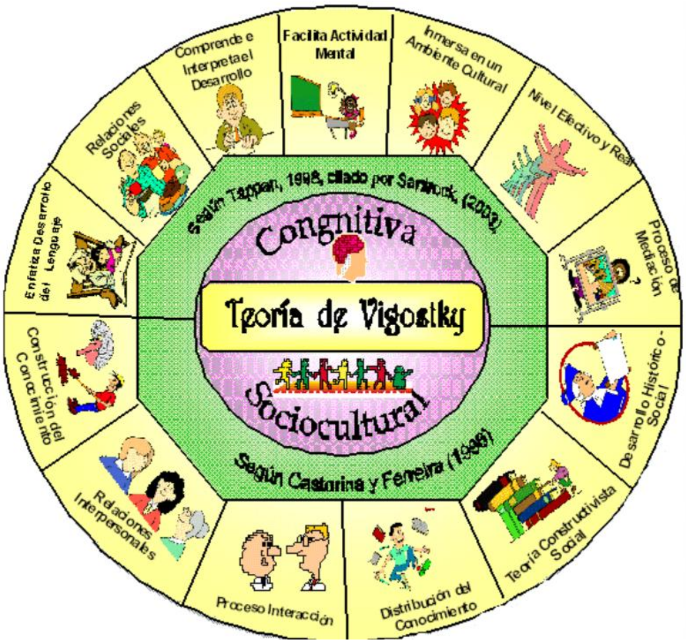


Figura 2. Perspectiva sociocultural o constructivista de Vygotsky
Fuente: Tappan (1998); Saracho (2003); Castorina y Ferreira (1998)
https://img.genial.ly/653d28ecfe92680011585fe3/89b198de-ceed-4245-af3b-46d96f5a62b3.gif

La teoría sociocultural del aprendizaje de Lev Vygotsky nos dice que el conocimiento se adquiere a través de la interacción social, del lenguaje y de enmarcarse en una cultura. Aprender, desde esta mirada, no es un asunto netamente individual; sucede dentro de un tejido social denso en donde el instructor, los iguales y hasta las herramientas simbólicas o tecnológicas desempeñan un papel decisivo (Vygotsky 1978). Respecto a la enseñanza de la matemática, lo favorecedor de esta teoría está en comprender por qué la utilización del recurso GeoGebra facilita entender el concepto abstracto de los números enteros mediado digital y colaborativamente en clases.

Una de las ideas más impactantes de Vygotsky es la Zona de Desarrollo Próximo ZDP, que sostiene que existe una distancia entre lo que el aprendiz es capaz de realizar por sí solo y lo que puede lograr con la ayuda de un adulto o compañeros más competentes. Dentro de esa zona, el avance en el aprendizaje se da cuando hay algún tipo de intervención, mediación o apoyo más próximo a los niveles complejos que detonan la comprensión (Moll 1990). En este caso GeoGebra actúa como herramienta mediadora situada dentro de la ZDP porque posibilita multisensorialmente la interiorización conceptual del posicionamiento de los enteros en la recta numérica y el comportamiento de las operaciones con negativos, siempre guiados por el profesor o trabajo grupal. La realización instantánea del gráfico asociado a una operación simplifica el proceso cognitivo necesario para entender distintos conceptos, favoreciendo su comprensión y autonomía.

La colaboración social y el andamiaje, otro concepto fundamental de esta teoría, son relevantes en la aplicación de tecnologías como GeoGebra. El andamiaje es la definición del soporte temporal que un tutor o compañero proporciona para facilitar a otro alumno la finalización de una tarea que aún no puede realizar de forma autónoma (Wood, Bruner y Ross 1976). En clase con ejercicios interactivos dentro de GeoGebra donde emplean números enteros en trabajos grupales, los alumnos tienen la posibilidad de construir conocimiento colaborativamente mientras comparten diferentes formas de resolver problemas, detectan errores y los corrigen a través de interacción factible gracias al aprendizaje. En este caso, la tecnología se convierte en un medio que promueve el aprendizaje compartido y situado porque los estímulos gráficos con materiales visuales provocan e intensifican el diálogo matemático en el curso hacia la construcción colectiva del saber.

El lenguaje y otras herramientas culturales promueven, sin duda, el desarrollo cognitivo. Hoy en día las tecnologías digitales son parte de esas herramientas simbólicas que median al pensamiento. En este sentido, GeoGebra es un recurso de gran valía cultural y pedagógica. Su uso en la enseñanza de matemáticas permite el diseño de tareas significativas, guiadas y exploratorias que fomentan el aprendizaje activo y reflexivo por parte de los estudiantes. Como consecuencia, el docente trasciende la mera exposición de contenidos para asumir un rol más activo como mediador que utiliza recursos digitales, preguntas abiertas, junto con espacios a la intervención grupal sobre sus razonamientos acerca de los errores y aciertos derivados del uso de dicho recurso.

En resumen, la teoría sociocultural de Vygotsky justifica el uso de GeoGebra como una herramienta que mejora la interacción en el aprendizaje, el aprendizaje situado y el aprendizaje guiado, donde la mediación del profesor y la interacción entre pares permiten a los estudiantes pasar de una comprensión más básica a una más profunda sobre los enteros. Así, se busca que los procesos de enseñanza-aprendizaje se tecnifiquen, se enriquezcan omosociocultural y humanamente, tal como se plantean los ideales educativos inclusivos contemporáneos.

De acuerdo con Vygotsky, aprender no es un proceso aislado, ocurre en compañía y se articula en diálogos, gestos, preguntas que se susurran y otras que quedan en la espera de una respuesta. En las aulas de la institución "Enma Vaca Rojas", GeoGebra se convirtió en un aliado en la enseñanza cuando la mayoría de los estudiantes, a los que las matemáticas les resulta un idioma extraño. Al conseguir que los estudiantes GeoGebra visualizara y manipulase los números enteros, con la ayuda de los profesores y compañeros, la aplicación se situó idealmente en la Zona de Desarrollo Próximo, facilitando el acceso a conceptos que, en el aislamiento, se tornan mucho más difíciles de alcanzar.

En sus actividades, el trabajo grupal y la interacción espontánea que se produce y la orientación oportuna del docente crean un entorno en el que los estudiantes no solo aprenden. Se atreven a aprender. GeoGebra no es solo tecnología, es también un espacio de encuentro: donde unos ayudan a otros, donde se explican ideas, donde se celebra el error como parte del proceso. En este ambiente, el docente deja de ser un expositor para convertirse en mediador, alguien que escucha, acompaña y orienta. Y es precisamente en ese entramado de relaciones donde el aprendizaje cobra vida. Así, la teoría sociocultural no solo explica por qué herramientas como GeoGebra funcionan, sino que también nos recuerda algo fundamental: que nadie aprende solo, y que la enseñanza cobra verdadero sentido cuando se construye con otros.

2.2.3. Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel

Figura 3. Diagrama conceptual pedagógico que integra el concepto de aprendizaje significativo con el enfoque por competencias
Fuente: Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (1968)
https://4.bp.blogspot.com/_hlN1pyI3fCk/TPLvsdlpuqI/AAAAAAAAACU
/Ksu7EBD3SI8/s1600/significativo.gif

La teoría del aprendizaje significativo formulada por David Ausubel sostiene que para aprender nueva información más eficientemente, esta debe estar relacionada de forma no arbitraria con lo que el estudiante ya sabe. En otras palabras, se torna verdaderamente significativo solo cuando el conocimiento previo del alumno ancla nuevos conceptos (Ausubel 1968). Este proceso es diferente de la memorización y el aprendizaje mecánico en donde la información se recuerda sin relación lógica profunda o comprensión. En el caso de la enseñanza de los números enteros, los alumnos suelen enfrentar problemas conceptuales en gran parte porque han sido sistemáticamente expuestos a algoritmos explicativos desconectados de sus vivencias o conocimientos previos.

Un enfoque importante dentro de esta teoría es precisamente la diferencia entre aprendizaje significativo y el aprendizaje mecánico (ver Tabla 1). El primero se caracteriza porque el estudiante tiene la capacidad de construir un esquema mental que le permite aplicar el conocimiento en otros contextos, en tanto que, en el segundo caso, la información se pierde casi de inmediato porque no hay entendimiento. GeoGebra, como herramienta interactiva, contribuye al aprendizaje significativo en toda su extensión porque da la posibilidad al estudiante de observar, manejar y verificar el comportamiento de los números enteros; por tanto, integra nuevas ideas a estructuras cognitivas.

Tabla 1
Comparación entre Aprendizaje mecánico y Aprendizaje significativo en el uso de GeoGebra

Aspecto	**Aprendizaje Mecánico**	**Aprendizaje Significativo con GeoGebra**
Método de enseñanza	Repetición y memorización de reglas	Exploración y conexión con conocimientos previos
Rol del estudiante	Receptor pasivo de información	Participante activo en la construcción del conocimiento
Uso de tecnología	Nulo o muy limitado	Interactivo y visual con GeoGebra
Comprensión de números enteros	Superficial, orientada a resultados rápidos	Profunda, orientada al entendimiento conceptual
Transferencia de conocimientos	Mínima	Alta, permite resolver problemas en nuevos contextos

Fuente: Ausubel (1983), el aprendizaje significativo; aprendizaje mecánico aplicado a GeoGebra, Hohenwarter y Lavicza (2007)
Elaboración propia

La parte más interesante para nosotros sería la inclusión de organizadores previos que aparecen como algo que se conoce o un esquema a manera de puentes entre lo nuevo y el aprendizaje. Enuncia de una manera distinta, los caminos hacia el nuevo conocimiento. Entonces surge la siguiente pregunta: en geometría algebraica, ¿qué papel cumplen algunos programas de GeoGebra? Pues en el momento en que graficamos enteros usando la recta numérica, entran en juego los números naturales y su forma logarítmica, por lo que geográficamente se perciben con facilidad. Esto le permite posteriormente evaluar incorporar números negativos.

Las animaciones ocasionan no solo entender un concepto, sino ir más allá: pensar fuera de la caja. He oído que han nombrado a eso sencillamente pensamiento crítico. Si logramos usar GeoGebra aprendiendo a restar y también a sumar enteros, es posible desde hace cientos de años saber cosas y por ese hecho hay una evolución. De esta manera podemos aprender tanto al comprender intensivamente las razones tras cada acto, tanto yo como asimilar lo avanzado sin tener que hacerme preguntas básicas y aterrizarles. Así como fue planteado integralmente, parece ser una reconocida pieza de resolución inmediata sin proporcionar una motivación.

Por el lado positivo, una actividad creada en GeoGebra que pide a los alumnos mover un punto en la línea numérica para mostrar -3 + 5, les permite no solo obtenerlo, sino además evidenciar todo aquel proceso mental que lo desarrolla. Por tanto, se van integrando operaciones con números negativos al cúmulo cognitivo ya existente, fortaleciéndolo aún más.

De esta manera tan breve podemos resumir lo que Ausubel fue planteando con base en la nueva teoría de aprendizaje, y cómo GeoGebra nos facilita llevar ese trabajo a la práctica dinámica y realista, actuando diferente desde el enfoque tradicional. Sin embargo, es diferente y realmente sorprendente. Perfectamente podríamos usar esas herramientas para brindar oportunidades invaluables donde la matemática puede ser asimilada de forma clara y profunda valiéndose de sus bases lógicas.

Cuando David Ausubel hablaba de aprendizaje significativo, pensaba en el momento en que lo nuevo no se memoriza solo porque sí, sino porque conecta bien con lo que ya tenemos en la cabeza. En las aulas de la escuela “Enma Vaca Rojas”, donde muchos chicos han aprendido matemáticas repitiendo reglas sin saber de dónde salieron, esa idea cobra un peso extra. Y es precisamente ahí donde entra GeoGebra y puede comenzar a hacer ruido. La herramienta no se queda mostrando cifras frías; da la chance de probar y tocar las mates. Por ejemplo, al arrastrar un punto en la recta numérica para ver qué pasa con -3 más 5, el alumno no sólo lee el resultado, sino que poco a poco agarra por qué eso es como es.

Ese tipo de actividad tan visual y concreta hace que lo nuevo se enganche rápidamente a conocimientos que ya tenemos, como la idea de avanzar, retroceder o simplemente ver dónde estamos en el espacio. Lo que antes se sentía confuso o demasiado abstracto empieza de repente a tener sentido claro. No se guarda solo para el examen, sino que se comprende de verdad y se queda más tiempo. En todo ese camino, GeoGebra hace de puente silencioso que Ausubel mencionaba: une lo que el alumno sabe con lo que necesita aprender, sin empujarlo y sin imponer una sola forma de pensar.

Así, enseñar con herramientas como GeoGebra no es solo aplicar tecnología en el aula. Es, en realidad, crear condiciones para que el aprendizaje tenga raíces, para que los conceptos se vivan, se piensen, se conecten. Y cuando eso ocurre, el aula deja de ser un lugar de fórmulas que se olvidan, y se transforma en un espacio donde las matemáticas empiezan a tener sentido.

2.2.4. Teoría del pensamiento matemático crítico

Figura 4. Diagrama de síntesis de las interrelaciones educativas, teoría del pensamiento matemático crítico
Obtenida de: https://tinyurl.com/2p89ewkp

Inversamente, la teoría del pensamiento matemático crítico, basada en los aportes de Richard Skemp y John Mason, diferencia dos tipos de comprensión matemática: la comprensión instrumental resulta de saber usar una técnica sin necesidad de comprender, y la comprensión relacional que deriva de un conocimiento más profundo y abarcador sobre el funcionamiento y las interrelaciones entre varios conceptos (Skemp 1976). Esta distinción aborda problemas didácticos muy relevantes considerando la enseñanza-aprendizaje de los números enteros. Por ejemplo, muchos alumnos aprenden a sumar o restar con signos automáticamente sin una construcción relacional que les permita hacer uso manejable y usarlos para solucionar problemas.

GeoGebra mejora la comprensión relacional. Utilizando métodos visuales y prácticos, los estudiantes también pueden ver cómo las operaciones con enteros influyen en la ubicación de un punto en una recta numérica, o cómo el movimiento hacia la izquierda y hacia la derecha corresponde con valores positivos y negativos. Esta imagen refleja el entendimiento de por qué algo funciona, permitiendo interiorizar principios más allá de la mera memorización mecánica de frases, como por ejemplo "menos veces menos es igual a más".

Mason (2006) planteó que criticar soluciones o justificar procesos es parte del pensamiento matemático crítico. Los alumnos, mediante GeoGebra, pueden intentar diferentes formas de resolver un único problema, diseñar pruebas, contrastar resultados, extraer conclusiones, y así, construir una aptitud evaluativa respecto a sus soluciones. Todo esto, es fundamental para el desarrollo de la lógica y las matemáticas, así como para la promoción de la iniciativa, el pensamiento de forma activa y el estudio reflexivo que se requiere en matemáticas y que se sostiene en la vida diaria.

Esta forma de trabajar, en conjunto, permite que la incorporación de GeoGebra en el aula de matemáticas haga posible transformar el aprendizaje en un espacio donde se da prioridad a la comprensión, la argumentación, y la exploración y se deja de lado la mecánica repetitiva. En la enseñanza de contenidos abstractos, como por ejemplo los números enteros, esto es un avance significativo, ya que permite construir una comprensión más profunda, duradera y flexible para resolver problemas en diferentes contextos.

El pensar críticamente en matemáticas implica no limitarnos a sumar, reiniciar o repetir una fórmula simplemente de memoria. En la escuela “Enma Vaca Rojas” muchos alumnos pueden calcular con números enteros, pero todavía se confunden con el significado del más y el menos. Por eso GeoGebra resulta tan útil. Sus gráficos permiten ver, en tiempo real, cómo un punto avanza o retrocede en la recta numérica cuando sumamos o restamos, y esa imagen

Además, el uso de esta tecnología les permite probar varias maneras de afrontar un mismo problema, ver qué funciona mejor en cada caso y explicar por qué eligen una ruta en lugar de otra. Esa actividad les permite pensar y construir de forma autónoma, permitiendo trabajar de forma más confiada y con menor dependencia de las instrucciones del profesor. Así, el aula se transforma de un mero taller de recetas en un laboratorio en el que se investiga, se discute y se construye el conocimiento de forma colectiva.

Desde esta perspectiva, el aula no solo se centra en el dominio de números enteros con GeoGebra, sino que se promueve la comprensión de un aprendizaje más significativo y el desarrollo del pensamiento crítico que se espera que perdure en el tiempo.

3. GeoGebra: herramienta digital para la enseñanza de las Matemáticas

GeoGebra es una aplicación educativa interactiva cuyo enfoque para el aprendizaje de matemáticas es incomparable. Con GeoGebra, los alumnos aprenden álgebra, geometría, cálculo y estadística de una manera dinámica e interactiva, porque los conceptos matemáticos pueden verse, moverse y probarse en tiempo real. La integración de gráficos, imágenes y texto simbólico en una única pantalla, hace de GeoGebra una herramienta óptima para profesores y alumnos de todos los niveles educativos y matemáticas, como se muestra en la figura 5.

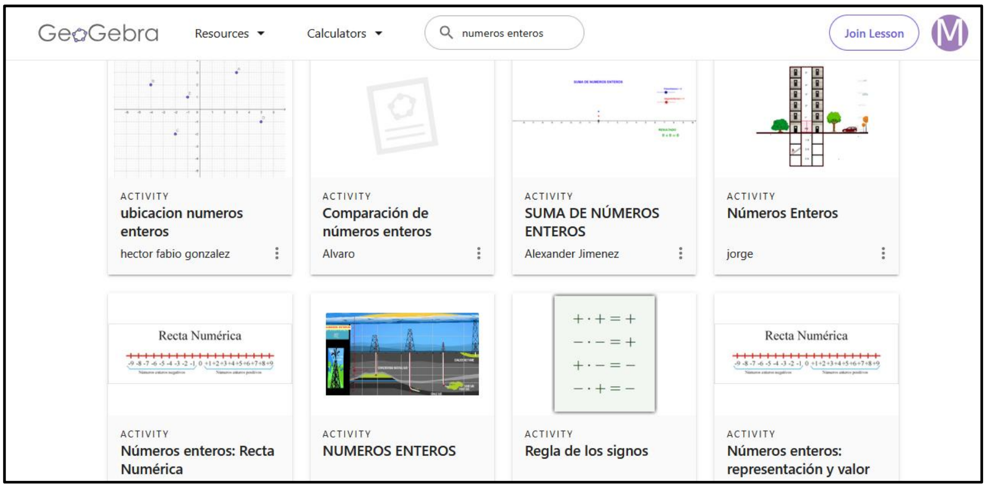


Figura 5. Recursos sobre números enteros
Fuente: GeoGebra (s. f.)

GeoGebra es muy valorado gracias a su interfaz minimalista y libre de desorden. Esto facilita la adaptación de usuarios novatos a la aplicación. Su uso es muy accesible. Agregar plantillas y comandos secuenciales apilables permite a los docentes personalizar cada sesión de clase para atender los diferentes ritmos y desafíos de sus alumnos. Esto permite que la docencia sea más significativa y personalizada.

Desde el ámbito pedagógico, GeoGebra encaja muy bien con las teorías más actuales sobre cómo aprendemos, tal como se muestra en la figura 6.

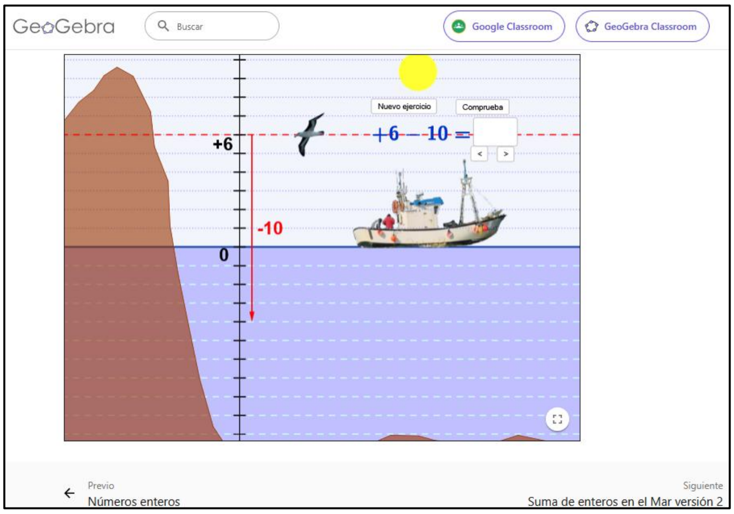


Figura 6. Suma de enteros en el Mar versión 2
Fuente: Aranda Murcia (s. f.)

Siguiendo a Piaget, la herramienta deja que los alumnos toquen y muevan objetos matemáticos en la pantalla, algo que, al manipular directamente, les ayuda a construir su propia comprensión, incluso de ideas abstractas como los números enteros. A la vez, en línea con Vygotsky, se puede usar dentro de su Zona de Desarrollo Próximo; el software apoya el trabajo en pareja y, cuando el docente interviene, esos diálogos guían el avance. Por otro lado, Ausubel también se siente representado, porque los gráficos y ejes nuevos se pueden vincular fácil y visualmente con lo que ya saben, convirtiendo el saber escolar en un aprendizaje realmente significativo de acuerdo con la ilustración de la figura 7.

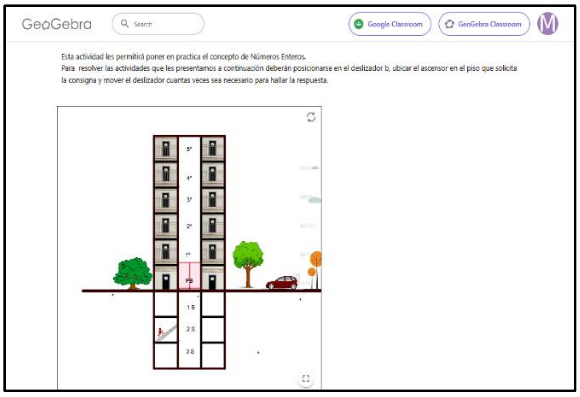


Figura 7. Actividad interactiva de GeoGebra titulada "Suma de enteros en el Mar versión 2". Utiliza el nivel del mar (0) para representar la adición y sustracción de números enteros
Fuente: GeoGebra (s. f.)

Otra ventaja pedagógica importante es que GeoGebra fomenta el desarrollo del pensamiento matemático crítico, tal como han señalado Skemp y Mason. Al permitir a los estudiantes mover figuras, ajustar parámetros y observar efectos inmediatos, la aplicación crea un entorno donde probar ideas, defender respuestas y volver a investigar se vuelve natural y ágil. Esa práctica constante cultiva la lógica, la curiosidad y la confianza necesarias para abordar problemas, no solo en matemáticas, sino en cualquier reto que encuentren hoy y en su futuro académico o profesional, el grafico 8 permite visualizar los avances de la tecnología.

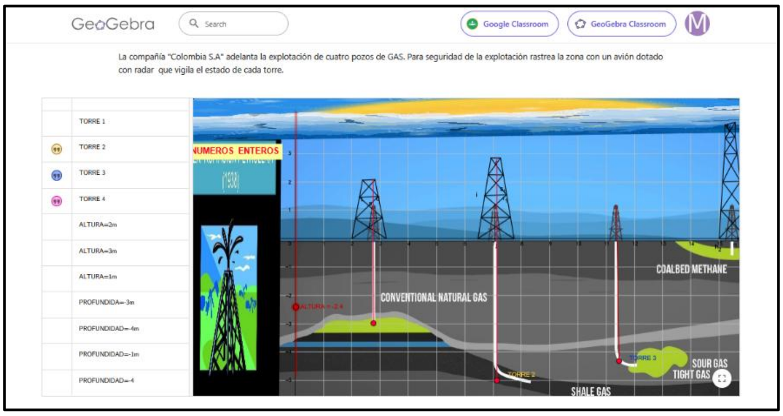


Figura 8. Repositorio de GeoGebra números enteros
Fuente: GeoGebra (s. f.)

Es innegable lo que se ha documentado acerca de GeoGebra en el aula. Las investigaciones, tanto de centros cercanos como de otros países, coinciden en que el uso de esta herramienta en la clase de matemáticas ayuda a los estudiantes a comprender los conceptos, disminuye el temor y aumenta el interés de la clase. Recientes trabajos de Cacao et al. (2023) y García-Peñalvo et al. (2021) indican que, en contextos similares a la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”, la pantalla interactiva ha permitido desmantelar algunos bloqueos sobre el uso de los enteros, facilitando y haciendo más atractivo el abordaje de este concepto.

Finalmente, GeoGebra ayuda a cambiar las experiencias educativas, pasando de un modelo centrado en la memorización y la repetición, a uno que enfatiza la exploración, la conversación y la construcción activa del conocimiento. Tal transformación es importante para modernizar la enseñanza de las matemáticas ante los desafíos educativos del siglo XXI, donde las competencias digitales y el pensamiento crítico son fundamentales.

En resumen, utilizar GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje no solo es una de las respuestas a los desafíos actuales en la educación matemática, sino que también ayuda a mejorar la comprensión conceptual de los estudiantes, la participación activa y el compromiso. En consecuencia, su aplicación sirve como la base metodológica para este estudio centrado en mejorar la enseñanza de los enteros en la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas”, como se muestra en la figura 9, y está completamente justificada para estos propósitos.

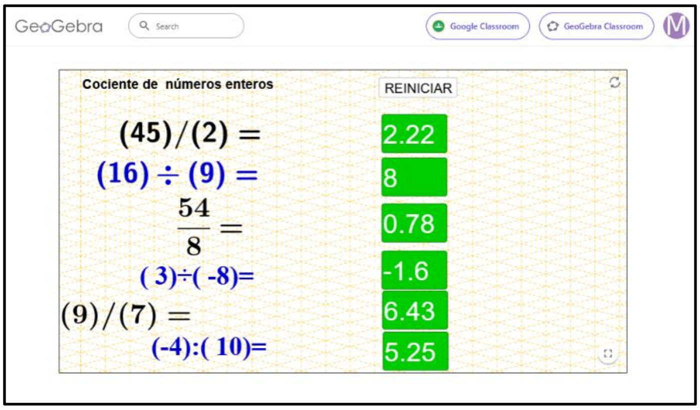


Figura 9. Actividad interactiva de GeoGebra para practicar el cociente de números enteros, mostrando operaciones y resultados
Fuente: GeoGebra (s. f.)

Capítulo segundo
Metodología

Este capítulo describe el enfoque metodológico adoptado para el desarrollo de la investigación, explicando los procedimientos y técnicas que permitieron abordar el problema planteado. Se detallan el tipo de estudio, el diseño utilizado y la población y muestra seleccionadas. Además, se explican las técnicas y los instrumentos de recolección de información utilizados, tanto cualitativos como cuantitativos, que aseguraron la validez y fiabilidad de los resultados. Al final, se describe la intervención pedagógica que se organizó para evaluar el impacto en la comprensión y resolución de problemas de los estudiantes de la Institución Educativa "Enma Vaca Rojas" con enteros, así como el diseño docente propuesto centrado en el uso de GeoGebra y la intervención pedagógica organizada para evaluar el impacto en la comprensión y resolución de problemas de los estudiantes de la Institución Educativa “Enma Vaca Rojas” con respecto a los enteros.

1. Enfoque metodológico

El estudio se realizó con un enfoque mixto ya que se requería entender el problema en diferentes dimensiones; desde la perspectiva de medición y obtención de datos cuantitativos y en contraposición, desde las voces, las experiencias y las percepciones de quienes cotidianamente habitan el proceso educativo. Como explican Hernández, Fernández y Baptista en 2014, el enfoque mixto consiste en la utilización de la metodología cuantitativa y cualitativa en un mismo estudio con el propósito de aprovechar las virtudes de ambos, obteniendo así, una visión más amplia y completa del fenómeno en cuestión.

En este caso, obtener información a nivel de encuestas, en conjunto con la intervención didáctica a realizarse posteriormente, constituyó un nivel aplicable dentro de la enseñanza que fue posible a través de la concentración en el enfoque cuantitativo inherente. A partir de esos datos, ya era posible identificar patrones, niveles de dificultad y proponer ciertas mejoras estratégicas para facilitar el aprendizaje de los números enteros. Aun así, explicar un problema basado en simples números nunca resulta suficiente. Por ello, se optó en esta ocasión para implementar un enfoque cualitativo a través de entrevistas semiestructuradas a docentes. Esas charlas brindaron matices que los números no mostraban y aclararon muchos otros aspectos que había en el aula.

Adoptar un enfoque mixto fue fundamental, ya que en este trabajo no solo se procuró medir resultados, sino que también se buscó entender diferentes procesos. Fue necesario explorar qué aprendieron los estudiantes y también a nivel micro, como lo son sus sentimientos, su esfuerzo, su transformación personal al enfrentar los números y cómo estos cambiaron su forma de pensar. Por lo tanto, este tipo de enfoque brindó una base contundente que permite analizar los efectos visibles y los más profundos de una estrategia educativa centrada en la tecnología.

Además, el estudio fue catalogado como una investigación aplicada, porque fue más allá de la teoría al plantear. Resolver un problema concreto dentro de una institución educativa. Se utilizó GeoGebra como recurso didáctico y se evaluaron sus efectos en el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, el enfoque metodológico fue congruente con la intención de optimizar las prácticas pedagógicas, así como también, enriquecer la experiencia educativa en el aula.

También se destacó que el trabajo poseía un rasgo descriptivo y explicativo. Era descriptivo, en virtud de que se realizó a partir de la consideración de una integración particular: los problemas que los estudiantes tenían con el cálculo de los números enteros. Y fue explicativo, en función de la intención de comprender si la aplicación de una estrategia didáctica diferente, basada en GeoGebra, podía mejorar el rendimiento y la comprensión alfabética de los estudiantes.

Como resultado, se optó por un diseño preexperimental. Con una sola muestra, 35 estudiantes, se les aplicaron ciertos instrumentos antes y, a posteriori, luego de una intervención. Por motivos logísticos, no se dispuso de un grupo de control, aun cuando era posible comparar los datos recolectados en ambos momentos. Esta organización brindó la posibilidad de valorar de manera adecuada la efectividad de la propuesta y formular recomendaciones útiles para intervenciones pedagógicas futuras.

Para concluir, la metodología se hacía referencia a la intención de replicar los matices de la realidad dinámica del aula. Se propuso atender a los datos y a las personas, articulando información objetiva con puntos de vista subjetivos. De alguna manera, eso fue lo que dotó de sentido a este trabajo.

2. Población y muestra

Hablar de población y muestra es fundamental si se desea hacer una investigación que tenga cierta organización y sentido. La población, en términos generales, es el grupo total que se quiere investigar o del cual se quiere obtener información. Así lo explican

Hernández, Fernández y Baptista (2014), quienes dicen que la población "es el conjunto de todos los casos que concuerdan con ciertas especificaciones" (174). Y dentro de esa población, se elige una muestra, que vendría a ser una porción representativa y más accesible, nadando con la que sí se puede trabajar de manera directa. Para Kerlinger y Lee (2002), la muestra hace posible realizar inferencias sobre toda la población, sin necesidad de estudiar a todos los miembros.

En esta investigación, la población estuvo conformada por los estudiantes del octavo año de Educación General Básica de la Unidad Educativa "Enma Vaca Rojas", en sus secciones A, B y C. En total eran 72 estudiantes. No era posible trabajar con todos debido a cuestiones de tiempo y recursos, por ello se optó por calcular una muestra representativa con un nivel de confianza del 90% y un margen de error del 10 %.

Muestra

Se trabajó con una muestra de 35 estudiantes. A estos 35 estudiantes se le aplicó una evaluación diagnóstica al inicio, para conocer sus principales dificultades respecto a los números enteros. Luego, tras implementar la intervención con actividades diseñadas en GeoGebra, se aplicó la misma evaluación (Ver Anexos 2 y 3), adaptada como post-test, para comparar resultados. Lo que se buscó ver ahí fue si, de verdad, algo había cambiado en la forma en que los estudiantes entendían y resolvían ese tipo de contenidos.

En la parte cualitativa, hemos trabajado con cinco docentes del nivel medio, todos del área de Matemáticas. No existió un muestreo estadístico para este grupo, ya que era de pequeño tamaño y fácilmente accesible. Participaron por su conocimiento acerca de la problemática y los alumnos. Las entrevistas que mantuvimos con ellos fueron clave para complementar la información recogida en las encuestas y tener una visión más holística de la situación que se desarrollaba en el aula.

En síntesis, la población y muestra en este estudio fueron seleccionadas con especial cuidado. Buscamos un equilibrio entre lo que era posible manejar, desde el punto de vista práctico, y lo que se requería para obtener resultados válidos. El cálculo no fue perfecto, pero fue suficiente para responder de manera seria a los objetivos planteados.

3.Técnicas e instrumentos de recogida de información

Para obtener una comprensión más clara sobre el aprendizaje de los enteros entre los estudiantes, fue necesario utilizar más de una técnica. No se trataba solo de determinar cuánto sabían, sino también de averiguar cómo vivieron ese aprendizaje. Por eso se utilizaron los dos métodos principales de recolección de información: encuestas y entrevistas.

Como se citó en Sampieri et al. (2014), las técnicas de recolección se definen como los métodos que derivan información relevante para resolver las preguntas de investigación planteadas. Y los instrumentos son las herramientas específicas que se utilizan para recolectar los datos, como cuestionarios, guías de entrevistas, formularios, etc.

En esta situación, la técnica principal del enfoque cuantitativo fue la encuesta. Se implementó con un cuestionario estructurado que contenía preguntas cerradas y de opción múltiple dirigidas a los 35 estudiantes de la muestra. Este cuestionario tenía como objetivo determinar las dificultades más destacadas que se encontraron al tratar con enteros: localización en la recta numérica, comprensión de los signos requeridos, realización de operaciones básicas y respuesta a preguntas simples. La encuesta se administró dos veces: primero, como una evaluación inicial o diagnóstica, y posteriormente, post intervención con GeoGebra, para evaluar cualquier cambio en las respuestas.

El instrumento en cuestión era, para algunos participantes, un formulario impreso y para otros, uno digital, que consistía en aproximadamente diez ítems dentro de tres secciones: conocimientos previos, percepción del aprendizaje y resolución práctica de problemas. El lenguaje utilizado en el cuestionario fue adaptado para ajustarse a los niveles de los alumnos de Básica Superior, evitando jerga innecesaria y utilizando escenarios cotidianos relacionados. El diseño del cuestionario se basó en trabajos anteriores como los de Morales Figueroa (2022) y Putra et al. (2025), quienes desarrollaron instrumentos similares para evaluar el aprendizaje de enteros en un entorno mejorado tecnológicamente.

Como parte del enfoque cualitativo, una técnica complementaria fue la entrevista semiestructurada. Se realizaron cinco entrevistas individuales con profesores del Departamento de Matemáticas de la institución. Las entrevistas fueron grabadas (con consentimiento previo) y transcritas posteriormente. La guía de la entrevista contenía preguntas abiertas relacionadas con las percepciones de los profesores sobre las dificultades de los estudiantes, sus experiencias enseñando enteros y sus opiniones sobre el uso de herramientas digitales como GeoGebra.

Esta técnica permitió reunir información más matizada y detallada, lo que enriqueció la interpretación de los resultados de la encuesta. Como afirman Taylor y Bogdan (1990), “la entrevista cualitativa le brinda al investigador la oportunidad de explorar los significados que las personas dan a sus experiencias, a situaciones sociales y a construcciones sociales” (p. 101). Esto es exactamente lo que se buscaba: no solo información sino también narrativas expresadas con las propias palabras de los participantes.

Juntas, las encuestas y las entrevistas proporcionaron una base de datos integral, que facilitó la triangulación de información y permitió una imagen más clara de lo que estaba ocurriendo en las aulas. Fue una mezcla de datos cuantitativos y voces cualitativas, respuestas objetivas y percepciones subjetivas, que de alguna manera enriquecieron el análisis final.

4. Descripción de la propuesta

La propuesta utilizada en este proyecto surgió de una necesidad muy específica: los estudiantes estaban teniendo dificultades con los enteros. No solo luchaban con la suma y la resta; era como si no comprendieran completamente el razonamiento detrás de los conceptos (Anexo 1)**.** Además, la práctica mecánica no estaba dando ningún resultado. Se les ocurrieron diferentes enfoques que se alejaban de las prácticas estándar. GeoGebra surgió como una solución atractiva, fácil de usar y, lo más importante, visual, lo cual era crítico en este caso.

Lo que se hizo fue diseñar algunas actividades puntuales, no muchas, pero sí bien enfocadas en temas como la colocación de los enteros en la recta numérica, operaciones con signos, e inclusive algunos problemas elementales. No obstante, lo central no fue el contenido, sino la forma en la que se trabajó. No se les pidió que escriban todo, sino que se les permitió que exploren, que movieran puntos en la pantalla. Era posible observar qué ocurría al sumar un negativo o restar un positivo. Muchas cosas que en el papel son difusas, al ser manipulativas, comienzan a cobrar un sentido.

El taller se dividió en cuatro sesiones. Para su desarrollo se utilizaron los laboratorios de cómputo de la institución y se dispuso de unos cuantos tablets que estaban disponibles. Los estudiantes, al comenzar el taller, mostraban su disposición a resolver y ver en qué funcionaban, algunos en pareja y otros de manera solitaria. Si, al inicio y como es de esperar con cualquier cosa nueva, hubo algo de duda, pero al asimilar el manejo de GeoGebra, todo fue más fluido. En realidad, la mayoría se acopló al ritmo rápidamente, hasta aquellos que me eran desmotivados en clases, terminaron mucho más participativos, aunque no todos, pero sí muchos.

En cuanto a las clases, se intenta dividirlas en partes de hasta 40 o 45 minutos, dado que la idea no es alargar excesivamente, sino lograr dejar alguna marca, aunque sea reducida. Queda totalmente claro que no se realizó una intervención perfecta, más bien se trabajó desde otros métodos, y eso era un acercamiento real a las matemáticas. GeoGebra no hace magia y está claro que en muchas ocasiones las palabras no alcanzaban a explicar cómo se resolvían las cosas, sin embargo, en otros momentos, poder arrastrar puntos y movimientos hace que lo entiendan desde el –3 hacia el +2, sin ningún esfuerzo, porque ése es el camino.

Al igual que antes, se volvió a aplicar la encuesta inicial con los 35 estudiantes después de completar todas las actividades. Lo importante aquí era comprobar si algo había cambiado. Percepción. Si las respuestas eran más coherentes. Si los errores que solían ser recurrentes habían disminuido. También, en cierta manera, se buscó comprobar si la postura hacia las matemáticas era diferente, aunque fuera marginalmente.

Intentar comprender el problema no fue completo y no pretendía serlo. No estaban en busca de elaborar una metodología que cambie la historia para siempre. Era, en cierta forma, un intento de zorra para cambiar un poco la lógica de enseñanza que se usaba y que los estudiantes fueran invitados a mirar las matemáticas desde una nueva perspectiva. Aunque los resultados no fueron sorprendentes, hubo ciertas ocasiones pequeñas, pero evidentes, donde parecían estar teniendo al menos algún impacto. Y con eso, era suficiente para esos intentos.

Capítulo tercero

Resultados

En este capítulo, se detallan y analizan los resultados de la aplicación de la propuesta de enseñanza con GeoGebra. Hay hallazgos tanto de la evaluación diagnóstica inicial como de las evaluaciones posteriores que brindan evidencia del progreso realizado por los estudiantes en la comprensión y aplicación de los enteros. También se incluyen las contribuciones cualitativas de las entrevistas a profesores que enriquecen la interpretación de los datos y brindan una visión más amplia de los cambios observados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así, el capítulo da cuenta de los cambios en el desempeño académico de los estudiantes y en su motivación y compromiso.

Los datos recopilados fueron analizados meticulosamente, aunque se abordó de una manera más sencilla. Se usó la herramienta GeoGebra con un propósito específico, entonces hubo que evaluar qué es lo que efectivamente ocurría antes y después de esa evaluación. En esa línea, no bastaba con revisar resultados aislados, se hacía necesario entender qué significaban esos resultados en relación con el proceso que los estudiantes efectivamente aprendieron o por lo menos estaban intentando aprender.

En particular, era necesario revisar los resultados de la encuesta diagnóstica, que se aplicó con los 35 estudiantes antes de iniciar cualquier tipo de actividades. Había una cierta tendencia, se puede decir de esta forma, que era un poco preocupante. Muchos de los encuestados encontraron dificultades para ubicar números negativos en la recta numérica, existía un grado de confusión asociado a la suma de signos diferentes y otros simplemente contestaban al azar. Lo anterior refleja la nula comprensión, pero además de eso, con una cierta inseguridad relacionada a si realmente tenían alguna idea de lo que estaban haciendo. Está claro que esto constituye un primer indicio, detrás de esto hay una explicación que aún no ha sido validada.

Luego se elaboraron cuatro sesiones en GeoGebra y se les aplicó la misma encuesta, con los mismos ítems, a los estudiantes. El objetivo era detectar cambios evidentes en el comparemos el resultado anterior y el posterior, y la verdad es que en varios casos sí hubo cambios. En líneas generales, el incremento en el nivel de respuestas correctas fue notable. Algunos errores que eran muy comunes, como la dirección de la recta numérica o el sumar sin tener en cuenta los signos recta numérica, disminuyeron casi en su totalidad. Y aunque no todos mejoraron al mismo ritmo, hubo cambios notorios.

Se obtuvo un conjunto de resultados analíticos. Se examinó cada ítem, analizando el número de estudiantes que respondían correctamente antes y después, y se estimó el porcentaje de mejora. También, los datos fueron organizados en tablas organizadas en Excel para tener una mejor representación visual. El incremento en la cantidad correcta fue notoriamente mayor en las preguntas sobre operaciones de la recta numérica, tal vez porque ahí GeoGebra tuvo más impacto visual. El mero hecho de presenciar el movimiento del punto simplificaba la comprensión sin necesidad de aprenderse las reglas.

Además, las entrevistas realizadas con cinco docentes fueron analizadas y forman parte de las encuestas. Fueron transcritas, leídas atentamente y se destacaron algunas frases que fueron recurrentes o que ayudaron a complementar lo establecido en las encuestas. Muchos coincidieron en que los estudiantes estaban más comprometidos al usar GeoGebra. Uno de los docentes incluso dijo que “cuando ven que algo se mueve y responde a lo que hacen, se involucran más rápido”. Aunque tales comentarios no pueden ser cuantificados, son muy útiles para entender los cambios que han tenido lugar.

Analizando, los datos cuantitativos y cualitativos comenzaron a entrelazarse y a complementarse. Mientras que las encuestas arrojaron resultados más medibles, las entrevistas proporcionaron antecedentes y contexto. A veces, los números sugirieron mejoras muy pequeñas, pero junto a las narrativas de los docentes, quedó claro que esas pequeñas mejoras eran mucho más significativas de lo que parecían a simple vista.

1. Resultados de la evaluación diagnóstica

La evaluación diagnóstica (Anexo 2) aplicada tuvo como propósito identificar el nivel de comprensión que poseen los estudiantes sobre distintos aspectos de los números enteros. A través de una serie de preguntas se buscó reconocer tanto los aciertos como las dificultades más frecuentes, con el fin de contar con un panorama claro del estado inicial de los aprendizajes, este instrumento permitió detectar en qué medida los alumnos logran trasladar los conceptos a situaciones prácticas y en qué casos todavía predominan errores o vacíos conceptuales. A continuación, se presentan los resultados obtenidos en cada ítem, acompañados de un análisis e interpretación que ayudan a comprender con mayor detalle la realidad del grupo evaluado.

En la primera pregunta, se analizó si los estudiantes podían reconocer el número más pequeño en la recta numérica, la mayoría mostró respuestas correctas. Es decir, 31 estudiantes del total de la muestra identificaron sin dificultad el número más pequeño en la recta numérica, lo que se traduce en un 88,57% correcto y el 11,43% incorrecto.

En términos generales, los estudiantes demuestran tener un entendimiento positivo de la noción más elemental del orden en la recta numérica y que los estudiantes ordenen números enteros faltando de menor a mayor, sugiere que tienen un conocimiento positivo en esta área de la recta numérica, es un hecho positivo en este estudio.

En esta línea de pensamiento, hay que mencionar que, a pesar de que el índice de aciertos es alto, el porcentaje de personas que no respondieron correctamente no puede ser ignorado. En matemáticas, los errores que no se corrigen al principio se van acumulando, dificultando y obstaculizando el aprendizaje de matemáticas más adelante. Si un estudiante no identifica sin seguridad cuál es el menor número en una recta, le será más difícil realizar operaciones que dependan de esa noción de orden.

En esta parte, la información se puede analizar de una forma positiva, debido a que la gran mayoría de los estudiantes posee un dominio aceptable. Pero no se debe descuidar el porcentaje menor que está en el límite, ya que porque la comprensión de la recta numérica es un requisito elemental para poder abordar problemas más complejos respecto a los números enteros.

En la segunda pregunta se pedía a los estudiantes identificar cuál era el número menor dentro de una lista. Los resultados muestran que 28 de los 35 participantes respondieron de manera correcta, lo que representa un 80%. Los 7 restantes, equivalentes al 20%, no lograron acertar.

Esta interpretación es interesante porque, a diferencia de la primera pregunta —donde casi todos reconocieron el número más pequeño en la recta numérica—, aquí el porcentaje de errores es mayor. Esto deja entrever que algunos estudiantes tienen más facilidad para reconocer la noción de orden en una representación gráfica. Dicho de otro modo, la lista de valores exige un nivel adicional de abstracción que no todos alcanzan con la misma soltura.

Desde esta óptica, se nota que mientras la mayoría maneja la idea de menor y mayor sin mayores problemas, un grupo todavía se confunde en situaciones aparentemente sencillas. En algunos casos esto puede estar ligado a dificultades para interpretar los signos negativos, pues no es raro que los estudiantes piensen que “–2” es mayor que “–7” solo porque el 7 es un número más grande en valor absoluto.

Cabe señalar que el 20 % de respuestas incorrectas no es un dato menor. Si un estudiante no tiene la seguridad en este aspecto tan básico, al enfrentarse a operaciones más complejas como la suma y resta de enteros, probablemente arrastre errores que limiten su progreso. De ahí que este resultado refuerce la necesidad de trabajar con recursos visuales y ejemplos prácticos que fortalezcan la comprensión del orden entre números enteros.

Esto sugiere que se deben seguir trabajando en algunos de los aprendizajes más básicos, los cuales son necesarios para poder abordar aprendizajes más abstractos.

En la tercera pregunta se evaluó la capacidad de los estudiantes para moverse a lo largo de la recta numérica sumando espacios. Los resultados muestran que 26 estudiantes respondieron de manera correcta, lo que corresponde al 74,29 %. Mientras, 9 estudiantes, es decir, el 25,71 %, cometieron errores.

Este porcentaje de fallos resulta más alto que en las preguntas anteriores y deja en evidencia que la operación de desplazarse en la recta numérica no está del todo afianzada. Observando que un número en abstracto puede resultar más sencillo, pero cuando se pide realizar un movimiento, por ejemplo, avanzar dos unidades hacia la derecha o retroceder tres hacia la izquierda, algunos estudiantes se confunden. En varios casos, esta dificultad se relaciona con la interpretación de los signos y la dirección del movimiento, un aspecto clave en la comprensión de los números enteros.

En relación con la problemática expuesta, este hallazgo refleja que todavía existe un grupo importante de estudiantes que no logra conectar de manera clara la idea de sumar o restar con el desplazamiento en la recta. Cabe señalar que este tipo de confusión es común en estudiantes de Básica Superior, pues al trabajar en el papel tienden a aplicar reglas mecánicas sin asociarlas a una representación visual.

Por otra parte, el hecho de que tres de cada cuatro alumnos sí resolvieran correctamente la pregunta indica que la mayoría cuenta con una base conceptual aceptable. Teniendo en cuenta que, 25% que aún presenta errores no puede ser ignorado. Si no se fortalece esta comprensión, será difícil que logren avanzar hacia operaciones más complejas como multiplicación y división de enteros o la resolución de problemas aplicados.

Como ya se ha mencionado, se ha logrado el objetivo propuesto, aunque el resultado fue intermedio. La mayoría sí comprende el desplazamiento a lo largo de la línea, pero todavía existe un número significativo de alumnos que no comprende la situación y requiere reforzarse. Por ello, el uso de recursos más visuales y de carácter interactivo favorece a la consolidación de lo que se ha llamado el “paso” de la parte algebraica a la parte gráfica de cálculo de la GeoGebra.

En la pregunta 4 se evaluó la competencia de los alumnos en la resolución de operaciones que combinan números negativos y positivos. El 31,43%, equivalente a 11 alumnos, se equivocó, mientras que 24 alumnos (68,57%) dieron una respuesta correcta.

El aumento de ese porcentaje de equivocaciones en relación a las preguntas anteriores hace suponer que las operaciones con la suma de enteros de signos diferentes representan un obstáculo. La confusión y el desorden en el uso de las reglas siempre será un problema. En la suma de un entero positivo y negativo, se suele perder el sentido de que la suma y resta se "anulan" y que se resta el resultado, obteniendo un resultado negativo como respuesta final.

Desde esta perspectiva, el hallazgo subraya que la dificultad no radica exclusivamente en un error puntual, sino en un problema conceptual que probablemente sea más profundo. Considerando el caso de los estudiantes que no logran esta operación, al parecer, no logran vincular la recta numérica al procedimiento que luego se hace de manera simbólica. Cuando se trabaja la suma –7 + 3, varios estudiantes no interpretan el movimiento que se hace hacia la izquierda y la diferencia de magnitudes, lo que da lugar a errores en la respuesta.

Es cierto que un 31% de las respuestas se encuentran en la categoría de correcto, esto aún sigue siendo un porcentaje considerable que debe ser atendido. La no consolidación de estas bases, permite la reproducibilidad de errores en más problemas avanzados como el planteo, la resolución de ecuaciones, problemas de contexto, y en el cálculo de fracciones enteras.

En resumen, los datos de esta pregunta ponen en evidencia que la operación con signos opuestos sigue siendo un punto débil para un número importante de estudiantes. Por eso es necesario reforzar esta temática con estrategias visuales e interactivas, de modo que el procedimiento no se limite a memorizar reglas, sino lograr conectar una comprensión real de cómo funcionan los enteros en la recta numérica.

En esta pregunta se indagó sobre la suma de números negativos. Los resultados muestran que 26 estudiantes contestaron de manera correcta, lo que corresponde al 74,29%. Sin embargo, 9 estudiantes, es decir, el 25,71%, no lograron resolver adecuadamente la operación.

Este porcentaje de errores es significativo porque, a diferencia de las sumas con signos distintos, la suma de negativos se suele considerar un procedimiento más sencillo: solo hay que sumar los valores absolutos y dejar el resultado con el signo negativo. Sin embargo, aún un cuarto del grupo parece tener dificultades en este aspecto. En algunos de estos casos, la confusión parece provenir de la aplicación de alguna regla incorrecta, como el supuesto de que el resultado de sumar dos negativos es un positivo, confundiéndose con la ley de signos que se aplica en la multiplicación y división de números enteros.

Desde otro punto de vista, el dato de que tres cuartos de los estudiantes logran manejar la regla con total sencillez, es un dato positivo a considerar. Sin embargo, el grupo con errores muestra que aún existen dificultades en la comprensión de la lógica de los enteros. Hay que tener en cuenta que estas dificultades no solo afectan las operaciones del movimiento y el signo, sino que también afectan el manejo de las ecuaciones, problemas y contextos más complejos, donde el signo y el movimiento exigen más atención.

La suma de negativos en la aritmética de los números enteros es fundamental. Si no se afianza este aprendizaje, los estudiantes se quedarán con la memorización y lo más probable es que fallen en resolver problemas en situaciones que son nuevas. Por ello, la utilización de gráficos y ejercicios de esta naturaleza con el uso de herramientas interactivas hay que hacer un esfuerzo en el aprendizaje más que en la memorización.

La mayoría de los alumnos en esta pregunta respondieron de forma adecuada. No obstante, un porcentaje importante de los alumnos encuestados sigue presentando errores conceptuales. Esto nos indica que hay que continuar utilizando diferentes estrategias didácticas que permitan el aprendizaje y la comprensión de forma más integral y duradera de la suma y la resta de números negativos.

En esta pregunta se vio si los alumnos sabían utilizar números negativos en situaciones cotidianas y prácticas. En total, se observó que 23 de 35 respondieron adecuadamente, lo que se traduce a un 65.71%. Por el contrario, 12 encuestados no respondieron adecuadamente. 34.29%.

Este resultado es uno de los más bajos en comparación con las preguntas anteriores, lo que evidencia que llevar los enteros al terreno cotidiano resulta más complicado que resolver operaciones directas. Reconocer que los negativos representan pérdidas, temperaturas bajo cero o deudas no siempre es evidente para todos. En varios casos, los alumnos tienden a resolver el ejercicio como si se tratara de un cálculo mecánico, sin vincularlo con una situación concreta de la vida diaria.

Dentro de este orden de ideas, se puede afirmar que la brecha entre la teoría y la práctica sigue siendo un reto en el aprendizaje de los enteros. Mientras la mayoría sí logró relacionar los negativos con un contexto real, el 34% que falló pone en evidencia que no basta con conocer la regla; es necesario darle sentido a través de ejemplos cercanos. Por ejemplo, si un estudiante no asocia el –5 con estar "cinco grados bajo cero" o "deber cinco dólares", probablemente no consolide el concepto de manera significativa.

Desde otra óptica, el hecho de que dos de cada tres estudiantes respondieran correctamente muestra que existe una base conceptual que puede fortalecerse. Sin embargo, el porcentaje de errores confirma que se necesita trabajar más en la conexión entre los números negativos y las experiencias cotidianas. GeoGebra u otras herramientas visuales pueden ayudar en este aspecto, pues permiten representar gráficamente situaciones de ganancia y pérdida o desplazamientos en la recta numérica.

En resumen, los resultados reflejan que aún hay una parte considerable de estudiantes que no logra aplicar con seguridad los negativos en contextos reales. Esto reafirma la importancia de usar estrategias didácticas que combinen la operación simbólica con ejemplos prácticos, de modo que los enteros dejen de ser una abstracción y se conviertan en un conocimiento útil y significativo.

En esta pregunta se pidió a los estudiantes identificar cuál de varias afirmaciones sobre números enteros era verdaderos. Los resultados muestran que 27 de los 35 participantes acertaron, lo que equivale al 77,14%. Sin embargo, 8 estudiantes (22,86%) no lograron reconocer la opción correcta.

Este nivel de aciertos refleja que la mayoría maneja conceptos básicos relacionados con las propiedades de los números. Aun así, el porcentaje de errores indica que casi una cuarta parte del grupo todavía presenta dudas cuando se enfrenta a enunciados teóricos. No se trata solo de aplicar una regla de cálculo, sino de comprender las características generales de los números, como el orden, el valor absoluto o el papel del cero.

Dentro de este orden de ideas, se puede interpretar que los errores podrían estar vinculados a la confusión entre definiciones cercanas. Por ejemplo, algunos estudiantes tienden a pensar que "todo número negativo es menor que cualquier número positivo" tiene excepciones, o que "el cero siempre es positivo", cuando en realidad estas afirmaciones tienen un tratamiento claro en la matemática formal. Estas vacilaciones sugieren que parte del grupo aún no consolida la comprensión conceptual necesaria para evaluar enunciados de este tipo.

El lado bueno es que más de tres cuartas partes del grupo respondió correctamente. Esto significa que, la gran mayoría ha internalizado las propiedades más fundamentales de los números enteros. No obstante, hay que considerar que cerca de uno de cada cuatro estudiantes comete errores, por lo cual es necesario continuar reforzando el trabajo con más ejemplos, más discusiones en clase y más actividades que contrasten las ideas previas que resulten erróneas.

Los datos revelan un panorama mixto: existe un nivel de comprensión aceptable, pero también un grupo importante que aún tropieza al analizar afirmaciones sobre números. Por eso resulta clave insistir en actividades que no se limiten a la operación mecánica, sino que promuevan la reflexión y la argumentación sobre las propiedades numéricas.

En esta pregunta se evaluó la comprensión de los estudiantes frente a la suma de un número negativo con cero. Los resultados muestran que 26 alumnos respondieron de manera correcta, lo que representa el 74,29%. En contraste, 9 estudiantes, equivalentes al 25,71%, cometieron errores en este ejercicio.

El hecho de que uno de cada cuatro estudiantes haya fallado en esta operación llama la atención, ya que se trata de un concepto fundamental: sumar cero a cualquier número no altera su valor. En algunos casos, los errores podrían estar relacionados con la idea equivocada de que el cero "cambia" el signo o el resultado, cuando en realidad su función es neutra. Estas confusiones revelan que, para parte del grupo, el cero aún no está consolidado como elemento neutral en la suma.

Dentro de este orden de ideas, cabe señalar que la mayoría sí reconoció correctamente que al sumar un negativo con cero el resultado conserva el mismo valor. Esto muestra que la regla está clara para la mayoría del grupo. Sin embargo, el 25% que no logra aplicarla correctamente evidencia vacíos conceptuales que pueden traer dificultades en operaciones posteriores, especialmente cuando se trabaja con expresiones algebraicas o problemas contextualizados.

Desde otra óptica, este hallazgo sugiere que los estudiantes que fallaron tienden a ver las operaciones de forma mecánica, sin analizar el sentido de cada número en la operación. Por eso, reforzar el papel del cero como "identidad aditiva" mediante ejemplos prácticos como el hecho de que tener una deuda de –5 dólares y sumarle 0 no cambia la situación puede ser una estrategia útil para afianzar el aprendizaje.

En resumen, aunque la mayoría resolvió la pregunta de manera adecuada, todavía un grupo significativo mantiene confusiones sobre el uso del cero en la suma con enteros negativos. Esto confirma la necesidad de insistir en actividades que combinen la explicación teórica con aplicaciones prácticas, para que el concepto se entienda no solo como una regla, sino como un principio lógico de la matemática.

En esta pregunta se buscaba comprobar si los estudiantes podían identificar qué operación representa retroceder en la recta numérica. Los resultados muestran que 26 de los 35 encuestados respondieron de manera correcta, lo que corresponde al 74,29%. En contraste, 9 estudiantes (25,71%) tuvieron dificultades para reconocer la operación adecuada.

El porcentaje de errores no es menor, ya que uno de cada cuatro alumnos no logra vincular el retroceso en la recta con la operación de resta. Esta confusión puede deberse a que algunos estudiantes conciben el cálculo de forma abstracta, sin apoyarse en la representación gráfica. En ciertos casos, también se observa la tendencia a confundir el desplazamiento hacia la izquierda con una suma de negativos, lo que muestra vacíos en la comprensión de la dirección y el sentido en la recta.

Dentro de este orden de ideas, hace referencia que la mayoría sí relaciona correctamente el retroceso con una resta, lo que demuestra que el concepto está presente en buena parte del grupo. Sin embargo, los estudiantes que se equivocan reflejan la dificultad de trasladar una operación simbólica a su representación espacial. Un ejemplo claro sería que, al resolver 5 – 3, algunos no lo interpretan como moverse tres unidades hacia la izquierda, sino que intentan aplicar reglas memorizadas sin visualizar el proceso.

Desde otra óptica, este tipo de errores confirma la importancia de trabajar con materiales gráficos e interactivos que permitan observar los desplazamientos en la recta. Herramientas como GeoGebra resultan útiles porque hacen visible cómo la resta implica retroceder en una dirección definida, lo que ayuda a consolidar el aprendizaje más allá de la memorización de reglas.

En resumen, los resultados de esta pregunta muestran un nivel de logro aceptable, aunque todavía un cuarto del grupo mantiene confusiones que pueden complicar el aprendizaje de operaciones con enteros. Por eso se hace necesario reforzar la relación entre el cálculo y su representación en la recta numérica, de modo que la operación adquiera un sentido más claro y duradero.

En esta pregunta se buscaba comprobar si los estudiantes podían reconocer una recta numérica ordenada de menor a mayor. Los resultados muestran que 26 de los 35 participantes respondieron correctamente, lo que corresponde al 74,29%. Sin embargo, 9 estudiantes (25,71%) no lograron identificar el orden adecuado.

El porcentaje de aciertos revela que la mayoría entiende el principio básico de que los números se organizan de izquierda a derecha, comenzando con los valores más pequeños y avanzando hacia los mayores. A pesar de ello, el hecho de que uno de cada cuatro estudiantes se haya equivocado indica que persisten vacíos en un concepto elemental. Esta dificultad puede deberse a la confusión con los enteros negativos, ya que algunos suelen pensar que “-2” es mayor que “-7” solo por el valor absoluto, lo que altera la secuencia correcta en la recta.

El resultado confirma que, aunque la mayor parte del grupo ya asocia el orden con la posición en la recta, aún existe un porcentaje considerable que no tiene completamente interiorizado este conocimiento. Cabe señalar que este error no es menor: si un estudiante no distingue con claridad el orden de los números, enfrentará mayores obstáculos en operaciones más complejas como comparaciones, desigualdades o resolución de problemas.

Los estudiantes que respondieron correctamente, por el hecho de haber ligado el concepto de 'orden' con el 'espaciado' de manera más directa, los estudiantes que respondieron incorrectamente, resuelven el problema de manera más memorística, con intuiciones más erróneas. Reforzar el trabajo con representaciones gráficas puede ayudar a cerrar esta brecha. Por ejemplo, la recta numérica es un recurso gráfico que concretamente puede ayudar a apreciar la secuencia de los números de menor a mayor.

En resumen, la pregunta muestra que el grupo en general domina la idea de orden en la recta, aunque todavía un cuarto de los estudiantes presenta errores importantes. De ahí que resulte necesario fortalecer este concepto a través de actividades prácticas y visuales que consoliden la relación entre el número y su posición en la recta numérica.

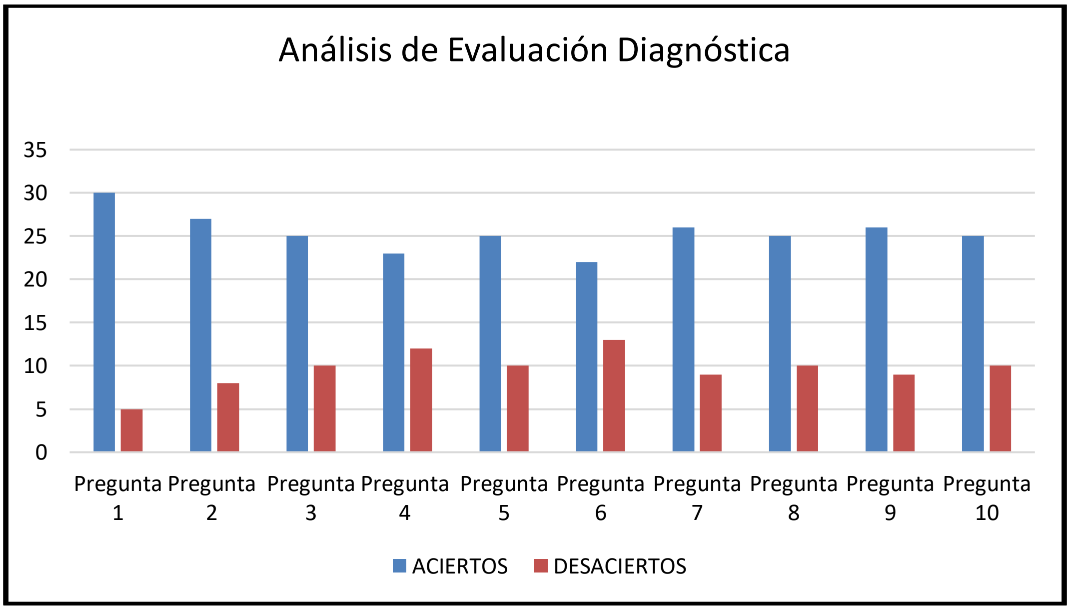


Figura 10. Resultados de la evaluación diagnóstica
Elaboración propia

2. Resultados posteriores a la aplicación de la clase con GeoGebra (Anexo 3)

Tabla 2

Post-evaluación de la identificación del número más pequeño en la recta numérica

Pregunta 1: Identificación del número más pequeño en la recta numérica			
Respuesta	**Cantidad**	**Porcentaje (%)**	**Porcentaje Acumulado (%)**
Correcto	14	93,33%	93,33%
Incorrecto	1	6,67%	100,00%
Total	15	100%	

Elaboración propia

Cabe mencionar que al inicio de la investigación se realizó la evaluación a 35 estudiantes, pero debido a factores institucionales y disponibilidad de recursos digitales se pudo aplicar a 15 estudiantes quienes participaron de manera continua en todas las sesiones de GeoGebra y quienes demostraban mayor dificultad en la temática.

La post-evaluación sobre la identificación del número más pequeño en la recta numérica evidencia un resultado bastante favorable. De los 15 estudiantes evaluados, 14 respondieron de manera correcta, lo que representa el 93,33%. Solo un estudiante cometió un error, equivalente al 6,67%.

Este dato muestra que, después de la intervención con GeoGebra, la mayoría de los alumnos logró consolidar la noción básica de orden en la recta numérica. Cabe señalar que este concepto, aunque elemental, suele generar confusiones iniciales, sobre todo cuando se trata de números negativos. Sin embargo, los resultados sugieren que la estrategia aplicada permitió superar en gran medida esas dificultades.

El alto porcentaje de aciertos refleja que los estudiantes no solo reconocen cuál es el menor valor en la recta, sino que también manejan con mayor seguridad la dirección del orden numérico. Incluso el pequeño porcentaje de error puede interpretarse como un caso aislado, posiblemente ligado a descuido o distracción, más que a una falta de comprensión real.

Desde esta perspectiva, el progreso es importante, porque la recta numérica es la base de otras operaciones con números enteros. Si los estudiantes son capaces de identificar el número más pequeño, tendrán mayor probabilidad de éxito en operaciones más complejas, como determinado en la resta y la suma con números enteros de distinto signo.

La Tabla se explica sola, es decir, la intervención pedagógica orientada propone en este caso una mejora en el tema y la comprensión, ya que, en la recta numérica, la casi totalidad del grupo se identificó con nivel superior en el dominio en la identificación del número más pequeño.

De la lista de números, en la posterior evaluación, se aprecia que 13 estudiantes, es decir el 86,67%, responden correctamente, en donde sólo 2 alumnos cometen errores para que se represente 13,33% del total.

En relación con la problemática expuesta, los resultados son positivos, ya que la gran mayoría logró reconocer con acierto el número más pequeño dentro de un conjunto escrito. Sin embargo, el pequeño grupo que se equivocó evidencia que todavía persisten ciertas dificultades cuando no se cuenta con un apoyo visual como la recta numérica. Cabe señalar que este tipo de confusión suele darse al comparar números negativos, pues algunos estudiantes tienden a fijarse en el valor absoluto y no en el signo, lo que los lleva a interpretaciones equivocadas.

Desde otro enfoque, la respuesta adecuada de casi nueve de cada diez estudiantes muestra el avance significativo en comparación con la etapa diagnóstica. Posiblemente, la intervención con GeoGebra ayudó en la comprensión de este tema, aunque queda algo por mejorar. Al menos, esos dos casos de error no reflejan necesariamente una falta de aprendizaje, pues podrían deberse a distracciones o, en el momento de la respuesta, a la inseguridad de la persona que estaba contestando.

Igualmente, este nivel de aciertos permite afirmar que los estudiantes lograron consolidar la noción de orden en listas de enteros, que es un avance importante para el progreso en la ejecución de operaciones más elaboradas. La identificación del menor de los números es una exigencia básica que impacta en la resolución de problemas, así como en el uso de las reglas de los números negativos.

En resumen, la tabla refleja un resultado favorable, con un porcentaje de éxito alto que demuestra avances importantes en la comprensión del tema, aunque todavía es necesario reforzar la comparación de números negativos en contextos no gráficos.

La post-evaluación sobre el movimiento en la recta numérica al sumar espacios refleja que 13 estudiantes contestaron correctamente, lo que corresponde al 86,67% del grupo. En contraste, 2 alumnos, es decir el 13,33%, no lograron resolver de forma adecuada la pregunta.

En relación con la problemática expuesta, los resultados muestran un avance importante. La mayoría de los estudiantes comprendió la idea de desplazarse a la derecha o a la izquierda en función del signo del número. Sin embargo, aún persisten algunas confusiones. Es posible que quienes se equivocaron hayan tenido dificultades para relacionar el signo con la dirección del movimiento, un error bastante común en la enseñanza de los enteros.

Dentro de este orden de ideas, el nivel de aciertos alcanzado es alentador, ya que confirma que la intervención con GeoGebra ayudó a consolidar la comprensión de este concepto. Cabe señalar que en la etapa diagnóstica el porcentaje de errores era mayor, lo que indica que la representación visual y dinámica facilitó la asimilación del tema. Incluso los estudiantes con menor interés inicial mostraron más disposición al poder “ver” cómo un número se desplaza en la recta.

Aunque los resultados son positivos, todavía es necesario reforzar la práctica de este contenido. El hecho de que algunos alumnos mantengan dificultades implica que la comprensión no está del todo afianzada y que requieren más ejercicios que combinen la representación gráfica con la simbólica.

En resumen, la tabla evidencia una mejora clara en el aprendizaje del movimiento en la recta numérica. La gran mayoría logró comprender la relación entre el cálculo y la representación visual, lo que constituye un paso clave para el manejo posterior de operaciones más complejas con números enteros.

La post-evaluación sobre el movimiento en la recta numérica al sumar espacios refleja que 13 estudiantes contestaron correctamente, lo que corresponde al 86,67% del grupo. En contraste, 2 alumnos, es decir el 13,33%, no lograron resolver de forma adecuada la pregunta.

En relación con la problemática expuesta, los resultados muestran un avance importante. La mayoría de los estudiantes comprendió la idea de desplazarse a la derecha o a la izquierda en función del signo del número. Sin embargo, aún persisten algunas confusiones. Es posible que quienes se equivocaron hayan tenido dificultades para relacionar el signo con la dirección del movimiento, un error bastante común en la enseñanza de los enteros.

Dentro de este orden de ideas, el nivel de aciertos alcanzado es alentador, ya que confirma que la intervención con GeoGebra ayudó a consolidar la comprensión de este concepto. Cabe señalar que en la etapa diagnóstica el porcentaje de errores era mayor, lo que indica que la representación visual y dinámica facilitó la asimilación del tema. Incluso los estudiantes con menor interés inicial mostraron más disposición al poder “ver” cómo un número se desplaza en la recta.

Desde otra óptica, aunque los resultados son positivos, todavía es necesario reforzar la práctica de este contenido. El hecho de que algunos alumnos mantengan dificultades implica que la comprensión no está del todo afianzada y que requieren más ejercicios que combinen la representación gráfica con la simbólica.

En resumen, la tabla evidencia una mejora clara en el aprendizaje del movimiento en la recta numérica. La gran mayoría logró comprender la relación entre el cálculo y la representación visual, lo que constituye un paso clave para el manejo posterior de operaciones más complejas con números enteros.

La post-evaluación sobre la suma de números negativos muestra que 12 estudiantes lograron resolver correctamente el ejercicio, lo que corresponde al 80% del total. En contraste, 3 alumnos (20%) no contestaron de forma adecuada.

En perspectiva planteada, el resultado evidencia un dominio mayoritario del procedimiento, aunque aún persisten algunas dificultades. Algunos estudiantes tienden a confundir el signo negativo con la multiplicación de signos, a pesar de que la regla de sumar los valores absolutos y mantener el signo negativo debería ser fácil de aprender. Esto podría explicar parte de los errores que he observado.

Observando el nivel de aciertos, la cantidad de estudiantes que comprendieron el concepto y lo aplicaron correctamente se puede considerar mayoritaria. Esto se debe, probablemente, a que la mayor parte de los estudiantes se preocupan por aprender. El 20% de los fallos, sin embargo, debe ser analizado. Probablemente, ese conocimiento no reforzado se podría presentar como una dificultad posterior y se podría ampliar a los estudiantes que no aprendieron el concepto.

Desde otra perspectiva, el emplear GeoGebra parece tener un efecto positivo. Se puede visualizar la operación en la recta numérica y reforzar la lógica del resultado. La combinación del cálculo simbólico con la representación gráfica necesita de más práctica. Esto, con el fin de evitar la dependencia de la memorización mecánica. La dependencia práctica de la memorización es algo que observé en los estudiantes y quiero que se mejore.

En un escaso par de meses logra concebir el razonamiento de la suma de números negativos, a 4 de 5 estudiantes les resolvieron sumas de números negativos, quedando un pequeño grupo que necesita refuerzo para que se cierre el tema, evitando que arrastre dificultades a aprendizajes posteriores.

Los resultados de la posevaluación de 15 estudiantes que les hice sobre el uso práctico de los números negativos, todos contestaron correctamente, el 100% de los estudiantes. En esta pregunta, todos los estudiantes respondieron correctamente.

Por el uso de ejemplos reales como deudas o pérdidas, todos los alumnos lograron aplicar los números negativos en casos como temperaturas bajo cero. Estos ejemplos suelen ser los que mayor conexión con la vida cotidiana, por lo que se facilita la comprensión y el cálculo, dejando de ser un concepto abstracto.

En la intervención con GeoGebra no solo se entendieron las normas operativas, también se relacionaron los enteros a situaciones reales. Al manipular representaciones visuales, se permitió a los estudiantes conectar los cálculos con ejemplos que se viven en el día a día.

Es importante mencionar que fallas en esta clase de ejercicios eran más numerosas en evaluaciones previas. Que todos los alumnos en esta ocasión hayan incluido correctamente estos ejercicios constituyen evidencia de un verdadero progreso en la comprensión del tema y su aplicación en la vida diaria.

A partir de los resultados de la tabla, se puede concluir que la estrategia que se implementó tuvo un impacto positivo. Que todos los alumnos alcanzaran un desempeño destacado no solo menciona que comprenden el concepto de los números negativos, también indica que lo pueden utilizar con firmeza en problemas de la vida real, que es un hito significativo en el aprendizaje de los números enteros.

Los resultados de la post-evaluación en la que se determinaron los enunciados verdaderos en torno a los números de los 15 estudiantes evaluados, cuyo 93,33% respondieron correctamente, es un claro resultado. Tan solo uno de ellos se equivocó lo que equivale al 6,67 %.

Respecto al problema planteado, este porcentaje de precisión indica que la mayoría de las personas pudieron identificar correctamente las afirmaciones positivas sobre los números, lo que indica una comprensión conceptual más clara que en la etapa de diagnóstico. Cabe señalar que este tipo de pregunta no se limita a la aplicación de ninguna regla mecánica, sino que requiere una cuidadosa interpretación del significado de los enteros y sus propiedades.

Revisando la situación desde otra perspectiva, el error que presenta una única persona en el caso del grupo pequeño podría asociarse con no prestar suficiente atención al enunciado de la pregunta o con alguna duda específica en la comprensión de los signos. A pesar de que el porcentaje es bajo, constituye un recordatorio de que la consolidación de un aprendizaje requiere práctica para evitar que se confundan en situaciones del mismo tipo.

Por otro lado, el alto número de aciertos demuestra que la intervención con GeoGebra facilitó el razonamiento no solo para resolver operaciones básicas, sino también para enfrentar enunciados más complejos de la matemática. Esto es importante, ya que los estudiantes comienzan a validar información y a reconocer patrones de forma crítica, un elemento fundamental en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático.

Finalmente, los resultados reflejan un dominio casi total del grupo con respecto a la tarea en la tabla. La mayoría de los estudiantes no solo aplicó los conocimientos que se les había enseñado de forma correcta, sino también construyó una comprensión más reflexiva sobre los números enteros.

Finalmente, en la post evaluación sobre la suma de un número negativo con cero, todos los estudiantes, 15 en total, respondieron correctamente lo que se traduce en un 100% de aciertos, sin que se registraran errores en esta pregunta.

Con respecto a la situación planteada, el dato señala que el grupo comprendió claramente una de las propiedades más simples de los enteros: sumar cualquier número con cero lo deja igual. Aunque el concepto es simple, en niveles iniciales, sobre todo con números negativos, esta propiedad no se aplica con seguridad.

Desde esta otra perspectiva, que todos los estudiantes resolvieron la pregunta con total facilidad, da cuenta que en la intervención se consolidaron no sólo los aspectos más complejos, como la suma con signos diferentes, sino que se garantizó el dominio de las reglas más básicas. Esta es una cuestión de vital importancia, ya que los estudiantes deben avanzar sin confusiones y con fundamentos sólidos en las reglas, que no por simples dejan de ser esenciales para las operaciones posteriores.

Se debe considerar también que la unanimidad de los resultados puede ser un indicador de confianza de los estudiantes respecto a su propio aprendizaje. Ellos no sólo pudieron identificar la regla, también la aplicaron sin titubeos, lo que, en el futuro, minimiza la probabilidad de errores en la misma.

La tabla muestra un dominio total del grupo en la casuística de sumar un número negativo con cero. Este logro, aunque elemental, es clave, ya que indica que los estudiantes han asentado no sólo los fundamentos, sino que también las operaciones más complejas, lo cual enriquece su comprensión integral de los números enteros.

Respecto a la operación que implica retroceder en la recta numérica, en la post-evaluación, 10 estudiantes respondieron de manera correcta, lo que equivale a un 66.67%. En contraposición, 5 alumnos no identificaron la operación correcta, cerrando en un 33.33% de errores.

Los resultados, en este sentido, indican que, aún con la mayoría de los alumnos que pudo establecer la relación entre el retroceso en la recta y la resta, o con la suma de un número negativo, hay un grupo significativo que todavía presenta dificultades. Errores de este tipo se originan, en la mayoría de los casos, de la confusión entre el desplazamiento a la izquierda en la recta y la operación del signo, ya que muchos estudiantes piensan en restar únicamente.

En cuanto a la problemática expuesta, algunas evidencias de las evaluaciones dan cuenta de que el aprendizaje se ha consolidado en buena parte del grupo aunque el avance no ha sido igualmente consistente a lo largo de otros temas. La situación en que un tercio de los estudiantes no ha podido responder evidencia que es un contenido que debe ser trabajado más a fondo, en especial a partir de ejemplos que relacionen matemáticas con acciones de la vida cotidiana, como dar pasos en un recorrido, o reducir una cuenta de dinero, o restar una cantidad.

Desde otra perspectiva, los resultados indican que la operación que hay que realizar para sopesar una situación, en términos de la evaluación, es mucho más que un simple ejercicio de cálculo. El estudiante debe no solo ejecutar la acción, sino que descifrar el sentido que la acción tiene en una recta numérica. Es por esta última razón que los errores se dan más por una dificultad conceptual que por un simple descuido en el procedimiento.

En resumen, la tabla evidencia un avance, pero también deja ver un área que necesita fortalecerse. Si bien dos tercios del grupo mostraron dominio, aún un número importante de estudiantes no logra asociar de manera clara el retroceso en la recta con la operación matemática que lo representa.

La pregunta número diez buscaba comprobar si los estudiantes podían reconocer una recta numérica correctamente ordenada, de menor a mayor. Los resultados muestran un dominio muy alto en este aspecto: de los quince participantes, catorce lograron responder de forma acertada, lo que equivale al 93,33%. Únicamente un estudiante, que representa el 6,67%, cometió un error.

Este hallazgo refleja que la mayoría de los alumnos asimiló adecuadamente el concepto de secuencia numérica luego de trabajar con la herramienta digital. La recta, al ser presentada de manera visual e interactiva, facilitó que los estudiantes identificaran con claridad la disposición ascendente de los números. Cabe señalar que este resultado contrasta con las dificultades que, en la etapa diagnóstica, se observaban en varios estudiantes para distinguir el orden de los enteros, sobre todo cuando se trataba de negativos.

Dentro de este orden de ideas, el alto porcentaje de respuestas correctas confirma que las actividades implementadas con GeoGebra no solo ayudaron a reforzar la comprensión, sino que también disminuyeron la confusión que antes aparecía en ejercicios básicos de ordenamiento. El hecho de que solo un estudiante haya fallado sugiere que aún pueden persistir pequeños vacíos individuales, posiblemente relacionados con la atención o con la ansiedad frente a la prueba, más que con una falta de entendimiento general.

En resumen, los datos de esta tabla muestran un avance notable en la comprensión de la recta numérica. El nivel de acierto logrado por casi todos los estudiantes evidencia que la propuesta pedagógica tuvo un efecto positivo, permitiendo superar una de las dificultades más frecuentes al trabajar con números enteros.

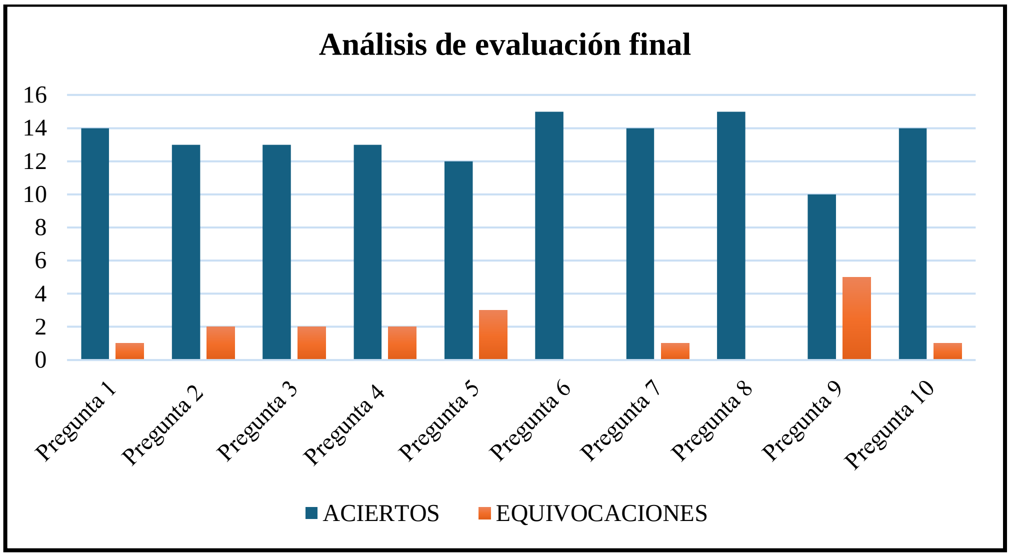


Figura 11. Análisis de evaluación final
Elaboración propia

3. Análisis comparativo de los resultados iniciales y la post evaluación

Para mostrar el progreso logrado por los estudiantes, presentamos una tabla comparativa entre los resultados de la evaluación diagnóstica inicial y los resultados de la evaluación final. Se pueden apreciar las diferencias en el nivel de logro para cada uno de los temas examinados suma, resta, multiplicación, división, operaciones combinadas y resolución de problemas contextualizados. Esto ilustra el progreso realizado después de incorporar la herramienta digital GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los enteros

Tabla 3

Análisis comparativo de los resultados

Pregunta	Correcto Antes (%)	Correcto Antes (n)	Incorrecto Antes (n)	Correcto Después (%)	Correcto Después (n)	Incorrecto Después (n)
P1: Número más pequeño en la recta	88,57%	31	4	100%	15	0
P2: Número menor en una lista	80,00%	28	7	93,33%	14	1
P3: Movimiento en la recta sumando	74,29%	26	9	86,67%	13	2
P4: Suma de negativos y positivos	68,57%	24	11	86,67%	13	2
P5: Suma de negativos	74,29%	26	9	86,67%	13	2
P6: Uso práctico de negativos	65,71%	23	12	80,00%	12	3
P7: Afirmación verdadera	77,14%	27	8	86,67%	13	2
P8: Suma con cero	68,57%	24	11	80,00%	12	3
P9: Retroceso en la recta	74,29%	26	9	86,67%	13	2
P10: Recta numérica ordenada	74,29%	26	9	93,33%	14	1

Elaboración propia

En la prueba de diagnóstico realizada en la primera etapa del proceso, se pudo ver que el dominio que poseen los estudiantes sobre los números enteros es sumamente limitado. En la etapa de adición, de los ejercicios que se propusieron, solo un 30 % tuvo éxito en la resolución de preguntas que contenían operaciones de suma de números enteros con signos distintos, mientras que en la resta de enteros el porcentaje descendió al 25 %. En el caso de las operaciones de multiplicación y división, el porcentaje de aciertos fue de 20 %, lo que evidenciaba que los estudiantes no comprendían la regla de los signos aplicados en los casos mencionados. En operaciones donde se requería la aplicación de varias reglas en un solo ejercicio, los alumnos tuvieron un desempeño peor del que se esperaba, en estos casos, la tasa de aciertos fue del 12 %. En la resolución de problemas situados, que incluían el manejo de deudas, ganancias o temperatura, la tasa fue de 15 %. Estos resultados iniciales evidencian que el aprendizaje era de carácter memorístico, además poco significativo, con un alto grado de inseguridad frente a los números enteros.

GeoGebra fue utilizado como un instrumento didáctico durante la etapa de la enseñanza. Gracias a la recta numérica digital y la herramienta de graficación para operaciones, los alumnos empezaron a entender de mejor manera la aplicación de las leyes de los signos. Se aliviaron los casos de confusión de suma y resta, gracias al desplazamiento de los puntos en la recta numérica. La corrección de errores en los ejercicios, gracias a la retroalimentación instantánea, se tradujo en un aumento en la confianza y autonomía de los alumnos. Gracias a GeoGebra, los alumnos pudieron abordar y resolver problemas en los que las matemáticas se relacionaban con situaciones de la vida cotidiana, como el dinero y los cambios de temperatura, obteniendo problemas matemáticos motivadores.

La mejora obtenida fue notable, en total los alumnos realizaron correctamente 75 de las sumas, obtenidas a partir de la primara, la cual se estableció en 70 sumas.

Esto demostró que aún había un progreso sustancial desde la etapa inicial de la evaluación. En multiplicación, la brecha de desempeño fue igualmente impresionante: los estudiantes pudieron alcanzar 68 de las respuestas apropiadas logradas, lo que significó una mejora en la comprensión de las reglas de los signos. Los estudiantes que antes habían tenido un desempeño deficiente en operaciones integradoras en los diagnósticos de clase, recuperaron 55 en las calificaciones, lo que mostró más de 40 puntos de progreso, desde la última etapa de la evaluación.

4. Resultados de las entrevistas aplicadas a los docentes

Para complementar la información recabada en las evaluaciones, se llevaron a cabo entrevistas con los profesores de la Institución Educativa Enma Vaca Rojas. Estas entrevistas posibilitaron la recolección de sus puntos de vista sobre los desafíos más habituales en el aprendizaje de los números enteros, las tácticas utilizadas en el salón de clases y la apreciación del empleo de instrumentos digitales como GeoGebra. Las contribuciones de los maestros brindan una perspectiva cualitativa que mejora el análisis los resultados obtenidos fueron sistematizados y codificados mediante la herramienta excel identificando los temas centrales, coincidencias, experiencias prácticas y recomendaciones que facilitan una mejor comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje en este asunto.

Tabla 4

Entrevista efectuada a los docentes

N.º	Preguntas	Entrevista 1	Entrevista 2	Entrevista 3	Entrevista 4	Entrevista 5	Análisis
1	Desde su experiencia en el aula, ¿cuáles cree que son las principales dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con números enteros?	Los alumnos tienden a olvidar con rapidez las normas sobre los números enteros porque no consiguen asimilar los conceptos. Esto ocurre porque a menudo aprenden de manera memorística y no entienden el sentido de los procedimientos.	Cuando se encuentran en situaciones diferentes, como la línea numérica, situaciones de la vida diaria o expresiones matemáticas, tienen dificultad para distinguir y reconocer números negativos y positivos.	Los estudiantes suelen tener problemas cuando se enfrentan a los signos aritméticos y las reglas algebraicas relacionadas con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.	A muchos alumnos les cuesta hacer operaciones con números enteros, no solo por los signos sino también porque no consiguen ver el proceso en la recta numérica ni relacionar las operaciones con su uso en situaciones reales.	Cuando los estudiantes no comprenden las reglas y la lógica que rige las operaciones con enteros, se les hace más complicado aplicar dichas operaciones en problemas más avanzados. Esto les genera problemas a la hora de avanzar a contenidos más difíciles y aritméticos.	Los problemas para los estudiantes en los casos de una situación problemática explican la falta de comprensión de las reglas de la operación y la falta de comprensión. Esto justifica el uso de métodos que la falta de comprensión en la operación define el uso de métodos más. Esto se, que la raíz de un problema no se define solo se 61643 345- and 234- sistemas.
2	¿Qué estrategias o métodos ha utilizado usted para enseñar este tema? ¿Ha sentido que funcionan?	He utilizado herramientas digitales como GeoGebra para la representación visual de operaciones, lo que ha facilitado la comprensión.	Empleo la recta numérica y juegos interactivos, que ayudan a reforzar las reglas de los signos de manera dinámica.	El principal método o estrategia que he utilizado es introducirlos a que conozcan estos signos y leyes de los signos para operar números enteros con gráficos visuales, juegos de personajes con números enteros y operaciones en lenguaje - pensamiento matemático.	Relaciono los enteros con contextos cotidianos (temperatura, deudas, ganancias), lo que hace más significativo el aprendizaje.	Implemento estrategias lúdicas (retos, dinámicas grupales) que han demostrado aumentar la motivación y la participación de los estudiantes.	En uno de los problemas y las correlaciones que inspección con las intervenciones. En estos motivan sobre el y la proporción aritmética. Ellos proporcionan la recta numérica y los digitales.

3	¿Ha notado si hay algún patrón en los errores o confusiones más frecuentes de los estudiantes con este contenido?	Sí, suelen cometer errores en el uso de fórmulas y procedimientos básicos, debido a que aplican las reglas de manera mecánica.	Presentan dificultades con los números negativos, especialmente al compararlos o ubicarlos en la recta numérica.	Se observa confusión frecuente en la aplicación de las leyes de los signos al realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división.	Requieren mayor práctica en operaciones combinadas, donde deben aplicar varios criterios de signos de manera simultánea.	En general, los errores más comunes se relacionan con el manejo de signos y reglas operativas, lo que afecta la comprensión global del tema.	Los errores más habituales, según los entrevistados, se relacionan con la operación de combinaciones y con la gestión de los signos. También mencionan dificultades en la aplicación de fórmulas y en el manejo de los números negativos. Esto hace suponer que los estudiantes requieren recursos prácticos y visuales para afianzar su comprensión de las operaciones.
4	¿Cómo reaccionan los estudiantes frente al tema de los enteros? ¿Lo reciben con interés, con miedo, con desmotivación?	Muchos lo reciben con miedo o inseguridad, ya que temen no poder resolver los problemas correctamente.	Algunos muestran incertidumbre, especialmente al enfrentarse a operaciones con signos.	La motivación de los docentes y la estrategia didáctica que emplean inciden de manera importante en la reacción. Con el uso de recursos didácticos claros y dinámicos se observa una mayor participación de los estudiantes.	Se observa que varios estudiantes reaccionan con temor anticipado, pensando que no comprenderán el tema.	Existe una respuesta variada: mientras algunos lo enfrentan con miedo por ser un tema nuevo, otros lo abordan con interés y disposición de aprender.	Respecto a los números enteros, la inseguridad, el miedo y la incertidumbre son sentimientos que predominan. Sin embargo, también se menciona que la reacción mejora con la inclusión de estrategias que son motivadoras y dinámicas. Esto refuerza la idea de que el uso de metodologías innovadoras puede transformar las metodologías negativas hacia el aprendizaje.
5	En su opinión, ¿qué tipo de actividades o recursos podrían facilitar la comprensión de los números enteros?	Implementar diferentes formas de resolución de problemas, buscando que los estudiantes comprendan el procedimiento de manera sencilla y práctica.	Utilizar juegos interactivos y ejemplos de la vida cotidiana, que conecten los números enteros con situaciones reales.	Incorporar gráficos, lecturas y ejercicios contextualizados, que permitan razonar cada operación y captar la atención de los estudiantes.	Aplicar material concreto y estrategias de gamificación, para hacer más dinámico y motivador el aprendizaje.	Favorecer el aprendizaje a través de juegos y dinámicas participativas, que despierten interés y refuercen la comprensión.	Según las respuestas, el uso de material concreto, juegos, actividades lúdicas y ejercicios contextualizados son recursos fundamentales para la comprensión. La repetición de esta metodología primaria sugiere que la práctica visual y la experiencia directa son determinantes en la adquisición de los contenidos matemáticos.

6	¿Conoce la herramienta digital GeoGebra? ¿La ha utilizado alguna vez en sus clases? Si la respuesta es no, ¿ha oído hablar de ella?	Claro que conozco GeoGebra. Lo valoro como un recurso digital para la educación matemática porque, entre otros, permite a los y las estudiantes graficar y visualizar conceptos que parece que no tienen forma y que anidan números enteros.	Sí, y la he utilizado en mis clases. Mi experiencia ha sido positiva, ya que GeoGebra es una herramienta excelente para captar la atención de los estudiantes y mejorar la comprensión de las operaciones básicas.	Sí, la herramienta GeoGebra, es muy acertada a la hora de enseñar sumas y restas con números enteros.	He oído de ese recurso y lo valoro como una forma de incorporar una estrategia que esté enfocada en las matemáticas para motivar a los estudiantes.	He usado GeoGebra y es una herramienta que ayuda en el trabajo integrantes la clase. Permite a los estudiantes interactuar con los conceptos matemáticos y no solo memorizar.	La mayoría de las personas encuestadas usan y conocen GeoGebra. Uno de los profesores dice que la conoce pero todavía no la ha usado y eso confirma que es un recurso que los profesores valoran para la educación matemática.
7	¿Cree que una herramienta como GeoGebra puede aportar algo distinto o valioso a la enseñanza de este tema en particular?	Sí, GeoGebra es una herramienta educativa interactiva que ayuda a comprender los números enteros a un nivel más abstracto de una forma visual e interactiva. Me ayuda a aprender conceptos más fácilmente.	Sí, y su valor radica en que transforma el aprendizaje tradicional en una experiencia dinámica, donde los estudiantes pueden experimentar directamente con los contenidos.	Sí, al igual que otras herramientas digitales como PhET, Geoplano o Genmagic.org, GeoGebra ofrece recursos interactivos que refuerzan el razonamiento lógico-matemático y enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.	En lo que he conocido de la herramienta, me parece muy útil, ya que favorece la representación de operaciones con números enteros y despierta mayor motivación en los estudiantes.	Sí, porque fomenta el interés y la participación activa de los estudiantes, haciendo que se involucren más en el aprendizaje y superen el miedo o la desmotivación hacia las matemáticas.	Es unánime el aprecio por el plus que ofrece GeoGebra: motiva a los estudiantes y hace el aprendizaje más activo, visual e interactivo. También, el uso de otras herramientas similares, más que demostrar resistencia, muestra apertura al uso de innovación digital en el aula. Esto, más que defender su uso, abala el uso de GeoGebra en el aula como metodología pedagógica en el estudio.

8	¿Qué ventajas y qué limitaciones cree que tendría usar una herramienta digital en el aula con sus estudiantes?	Una ventaja importante es que facilita la comprensión de los contenidos, ya que las representaciones visuales ayudan a que los estudiantes asimilen mejor los conceptos abstractos.	Incorporar estas herramientas fomenta un método de aprendizaje más lúdico y agradable, lo que promueve una mayor motivación y participación activa en el aula.	Un beneficio destacado del uso de herramientas digitales en el aula es que contribuyen a que los alumnos desarrollen un aprendizaje significativo. Los alumnos se convierten en protagonistas de su proceso de aprendizaje, pudiendo explorar y construir su conocimiento de forma autónoma y por sí mismos.	Entre las limitaciones, se encuentra la falta de acceso a recursos tecnológicos o a internet en algunos contextos escolares, lo que puede dificultar la implementación equitativa de estas herramientas.	Se debe considerar que existen diferencias en las habilidades tecnológicas de los estudiantes, lo cual puede requerir más tiempo de acompañamiento y capacitación inicial.	Entre los beneficios se encuentran la mejora de la comprensión, el aprendizaje significativo y lúdico, así como el aumento de la motivación de los estudiantes. Se mencionan como limitaciones el acceso restringido a internet o a recursos tecnológicos y las diferencias en las competencias digitales. Si bien este contraste evidencia la utilidad de la herramienta, también indica la necesidad de contar con condiciones adecuadas para su puesta en práctica.
9	Durante la implementación de actividades con GeoGebra, ¿notó alguna diferencia en la participación o comprensión de los estudiantes?	Sí, los estudiantes se mostraron más motivados para resolver los problemas matemáticos.	Sí, se evidenció un mayor interés y participación activa durante las actividades.	Sí, al utilizar GeoGebra los estudiantes demostraron mayor atención y entusiasmo, ya que la herramienta despertó curiosidad y favoreció una mejor comprensión de los contenidos.	No, en mi caso no he utilizado la herramienta en el aula.	Sí, se observó una diferencia positiva tanto en la motivación como en la capacidad de comprensión de los estudiantes.	La utilización de GeoGebra por parte de algunos docentes ha resultado en un incremento notable en el enfoque, interés, y motivación de los estudiantes, además de ayudarles a comprender mejor los contenidos. Solo uno de los profesores no la utilizó en el salón de clases, pero aun así, reconoce su potencial. Esto respalda que su aplicación promueve el aprendizaje significativo.

10	Si tuviera la posibilidad de incorporar herramientas como esta de manera permanente, ¿lo haría? ¿Por qué sí o por qué no?	Sí, porque a los estudiantes les resulta más atractivo aprender con herramientas digitales y muestran mayor motivación en las clases.	Sí, ya que permiten diferentes formas de asimilar la información, favoreciendo tanto a estudiantes visuales como a los que aprenden con la práctica.	Sí, porque captan la atención de los estudiantes al presentar contenidos gráficos que hacen más comprensibles operaciones que suelen ser abstractas; además, apoyan al docente en su labor de guía.	Sí, incluso fomentaría que también se usen en casa como recurso de apoyo, para reforzar lo aprendido en clase.	Sí, porque facilitan la comprensión de los temas y contribuyen a que el aprendizaje sea más significativo.	El consenso es que integrarían GeoGebra de manera permanente, porque hace más fácil la comprensión, despierta el interés, brinda múltiples maneras de aprender y apoya al profesor. Se propone incluso emplearlo en casa como refuerzo. Esta concordancia proporciona pruebas sólidas a la investigación acerca de la conveniencia de incorporar herramientas digitales en la instrucción matemática.

Elaboración propia

Conclusiones

Al abordar la identificación de dificultades, se encontró que los estudiantes tenían grandes problemas con la aplicación de las leyes de los signos, la resolución de operaciones combinadas y la transformación de situaciones de la vida cotidiana en expresiones matemáticas. Además, había una falta de confianza y miedo respecto al tema, que, a su vez, restringió su participación. Estos hallazgos permitieron definir los puntos críticos que debían reforzarse con la ayuda de estrategias digitales.

El diseño e implementación de las actividades con GeoGebra resultó pertinente debido a que los resultados presentados de GeoGebra permitieron una secuencia visual, interactiva y contextual de los enteros. Digitalizados linealmente, con numerosos desafíos y simulaciones de juegos, los estudiantes lograron comprender mejor las reglas operativas motivacionales. La instrucción aumentada para practicar operaciones estándar elementales cautivó con éxito a los estudiantes con varios ángulos participativos ardientes.

A diferencia de las comparaciones diagnósticas evaluativas y finales, la comparativa constructiva proporcionó una interpretación didáctica significativa. Como lo evidencia el gráfico, hubo niveles en los que se evaluaron las evaluaciones de razonamiento y relación en la prueba estratificada cuestionada inicial en la que participé directamente en la explicación. En el desarrollo final, las puntuaciones obtenidas fueron predominantemente superiores al 60% para la mayoría de los módulos de refuerzo del tema. En las evaluaciones obtenidas hay una diferencia de más de 30 puntos en probabilidad para las operaciones de suma y resta junto con la reducción de errores y aumentos de resta en operaciones y ataques de problemas. En las evaluaciones se utilizó GeoGebra.

La integración de GeoGebra en el aula mejoró el proceso de enseñanza-aprendizaje al cambiar el flujo pedagógico del aula. Los estudiantes se autoevaluaron con más certeza, trabajaron de manera más independiente y estaban dispuestos a usar el conocimiento recién adquirido en situaciones de la vida real. Además, la herramienta digital permitió al docente adoptar una postura de enseñanza más facilitadora, en lugar de mecánica y procedimental. Como resultado, se fortalecieron las competencias matemáticas relacionadas con la comprensión conceptual, el razonamiento lógico y la resolución de problemas, que son fundamentales en la formación de los estudiantes de Educación Básica Superior.

La herramienta digital GeoGebra debería utilizarse de manera permanente en la planificación de lecciones en las clases de Matemáticas de octavo grado porque ha sido útil en la comprensión de los enteros y en el desarrollo de habilidades para resolver problemas.

Para realizar un diagnóstico inicial, sería recomendable dirigirse a cada Unidad de Matemáticas, dado que cada Unidad contiene algunas competencias básicas que, de ser dominadas, ayudarían a detectar algunas de las dificultades que la mayoría de sus estudiantes presentan con mayor frecuencia. Esto ayudaría a diseñar algunas estrategias más ajustadas que podrían contemplar algunos recursos digitales que atiendan más directamente a esas debilidades.

Seguir diseñando e implementando actividades interactivas con GeoGebra, más allá de la práctica operativa y problemas más contextualizados, es también una recomendación. Esto les permitirá a los estudiantes establecer algunas de las relaciones que se requieren entre los números enteros y algunas situaciones de la realidad, contribuyendo así a un aprendizaje que realmente sea significativo.

Es una realidad que a los docentes les falta confianza en el uso de GeoGebra y otras herramientas digitales. Por eso es importante e indispensable seguir con las capacitaciones de esas y otras herramientas para que los docentes en el uso de esas herramientas y en las estrategias que pueden utilizar en el aula. Del mismo modo, se recomienda alentar a los estudiantes a utilizar la herramienta en casa para reforzarse a sí mismos y desarrollar habilidades matemáticas de manera regular.

Obras citadas

Artigue, Michèle. 2002. "Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work". *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7 (3): 245-74. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080.

Ausubel, David P. 1968. *Educational Psychology: A Cognitive View.* Nueva York: Holt, Rinehart and Winston.

Boaler, Jo, y Carol S. Dweck. 2016. *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching.* San Francisco: Jossey-Bass.

Brands, Niki, y Palomino Cordero. 2023. "Herramientas digitales y logros de aprendizaje en el área de matemática en estudiantes de CEBA del distrito de Tambo – Ayacucho". Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Huancavelica. https://repositorio.unh.edu.pe/handle/20.500.14597/5366.

Cacao Muñiz, Celia Mariuxi, Norberto Ramón Toala Villamar, George Robert Matute Castro y Jennifer Valeria Macías Solórzano. 2023. "La Tecnología del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) como recursos didácticos en los estudiantes de Bachillerato". *Polo del Conocimiento* 8 (6): 645-63. https://doi.org/10.23857/pc.v8i6.5704.

Camacho Marín, Raúl, Carlos Rivas Vallejo, María Gaspar Castro y Carolina Quiñonez Mendoza. 2020. "Innovación y tecnología educativa en el contexto actual latinoamericano". *Revista de Ciencias Sociales* 26 (extra 2): 460-72. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7599957.

Case, Robbie. 1992. *The Mind's Staircase: Exploring the Conceptual Underpinnings of Children's Thought and Knowledge.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Cohen, Louis, Lawrence Manion, y Keith Morrison. 2018. *Research Methods in Education.* 8.ª ed. Londres: Routledge.

Cruz, Magdalena; Julissa Dolores Reynoso Holguín; y Ronald José Mejía. 2020. "Educación superior: La Tecnología del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC): Un enfoque hacia las matemáticas". *Revista Educación Superior* (29): 127-38. https://doi.org/.

Downes, Stephen. 2012. *Connectivism and Connective Knowledge: Essays on Meaning and Learning Networks.* Ottawa: National Research Council Canada.

El Universo. 2019. "Ecuador reprobó en matemáticas en evaluación internacional". *El Universo,* 26 de febrero.

https://www.eluniverso.com/guayaquil/2019/02/26/nota/7207946/matematicas-no-se-paso-prueba/.

García-Peñalvo, Francisco José, Alfredo Corell, Ricardo Rivero-Ortega, María J. Rodríguez-Conde y Nicolás Rodríguez-García. 2021. “Impact of the COVID-19 on Higher Education”. En *Impact of the COVID-19 on Higher Education*, 1–18. https://doi.org/10.4018/978-1-7998-4156-2.CH001.

Hernández Sampieri, Roberto, Carlos Fernández-Collado y Pilar Baptista Lucio. 2014. *Metodología de la investigación.* 6.ª ed. Ciudada de México: McGraw-Hill Education.

Huamani Yauri, Juan. 2022. “Uso de herramientas digitales para desarrollar las competencias matemáticas en estudiantes de una institución educativa de Cusco, 2022”. Tesis de licenciatura. Universidad.

Kamii, Constance, y Ann Dominick. 1998. “The Harmful Effects of Algorithms in Grades”. *The Journal of Mathematical Behavior* 17 (1): 1-4.

Kerlinger, Fred N., y Howard B. Lee. 2002. *Investigación del comportamiento: Métodos de investigación en ciencias sociales.* 4.ª ed. Ciudad de México: McGraw-Hill Interamericana.

Kolb, David A. 1984. *Experiential Learning: Experience as the Source of Learning and Development.* Nueva York: Prentice-Hall.

Kop, Rita, y Adrian Hill. 2008. “Connectivism: Learning Theory of the Future or Vestige of the Past?”. *International Review of Research in Open and Distance Learning* 9 (3): 1–13. https://doi.org/10.19173/irrodl.v9i3.523.

Mason, John. 2006. *Thinking Mathematically.* Harlow: Pearson Education.

Moll, Luis C., ed. 1990. *Vygotsky and Education: Instructional Implications and Applications of Sociohistorical Psychology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Morales Figueroa, Carlos G. 2022. “Recursos interactivos de operaciones aritméticas en el conjunto de los números enteros con el software GeoGebra”. Jornadas Ecuatorianas de GeoGebra, UNA-E, 14 de julio de 2022.

Moreira, Marco Antonio. 2005. “Aprendizaje significativo: Un concepto subyacente”. *Revista de Educación* (337): 13–38.

Novak, Joseph D. 2010. *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations.* Nueva York: Routledge.

Ortiz, Carlos. 2023. *Uso de GeoGebra para el aprendizaje de la aritmética en educación primaria*. México: Universidad Nacional de México.

Piaget, Jean. 1972. *Psychology and Epistemology: Towards a Theory of Knowledge.* Londres: Penguin Books.

PISA. 2018. *Informe general PISA 2018.* París: OECD.

Putra, Zetra H., R. Dita, I. Z. Shofa, N. H. Putri y E. Noviana. 2025. “Designing a Joyful Mathematical Learning of Integer Operation Integrated GeoGebra for Sixth-Grade Elementary School”. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research, SULE-IC 2024.* Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/978-2-38476-390-0_30.

Radović, Sladjana, Marija Radojičić, y Katarina Veljkovic. 2018. “Examining the Effects of GeoGebra Applets on Mathematics Learning Using Interactive Mathematics Textbook”. *Interactive Learning Environments* 28 (1): 49–66.

Reynoso Holguín, Julissa Dolores, Ronald José Mejía y Magdalena Cruz. 2020. “La Tecnología del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC): Un enfoque hacia las matemáticas~~.~~”. *Revista Educación Superior*~~, Núm.~~ (29~~:~~): 127~~–138.~~-38. https://doi.org/.

Skemp, Richard R. 1976. “Relational Understanding and Instrumental Understanding”. *Mathematics Teaching* (77): 20-6.

Taya Cuzco, Diana W. 2024. “El software GeoGebra en el proceso de cálculo de números enteros en los estudiantes de básica superior”. Tesis de licenciatura, Universidad Politécnica Estatal del Carchi (UPEC).

Taylor, Steven J., y Robert Bogdan. 1990. *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Barcelona: Paidós.

Vygotsky, Lev S. 1978. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Cambridge: Harvard University Press.

Wood, David, Jerome S. Bruner, y Gail Ross. 1976. “The Role of Tutoring in Problem Solving”. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 17 (2): 89-100. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x.

Ziatdinov, Rushan, y José R. Valles Jr. 2022. “Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics”. *Mathematics* 10 (3): 398. https://arxiv.org/abs/.

Anexos

Anexo 1 Planificación microcurricular trimestral

Ministerio de Educación

Escuela de Educación Básica Fiscal "Enma Vaca Rojas"

FUNDADA EN EL AÑO 1986-ACUERDO MINISTERIAL 0094, Dirección: Panamericana Sur Km. 11 ½ entrada por el Beaterio
Cantón: Quito - Parroquia: Turubamba - Barrio: La Cocha , Teléfonos: 023817261 / 098170358
Quito - Ecuador

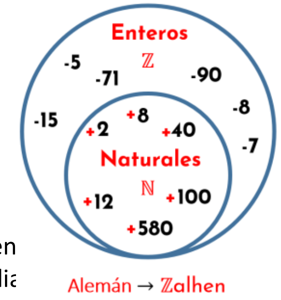
DATOS INFORMATIVOS

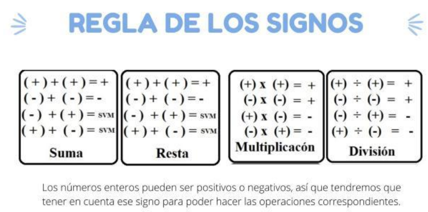
Nombre de la Institución: ENMA VACA ROJAS **Trimestre: 1** **Duración: 6 SEMANAS**
Grado/Curso: OCTAVO A **Fecha Inicio: 07/10/2024** **Finalización:22/11/20224**
Nombre del docente: LIC. MYRIAN NOLE **Jornada: VESPERTINA**

APRENDIZAJE DISCIPLINAR: NÚMERO REALES

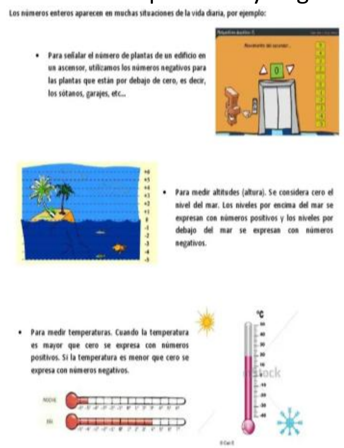
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:
O.M.4.1 Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros, racionales, irracionales y reales; ordenar estos números y operar con ellos para lograr
una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas); y fomentar el pensamiento lógico y creativo.

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO	INDICADORES DE EVALUACIÓN	ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS ACTIVAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE	ACTIVIDADES EVALUATIVAS
M.4.1.1. Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales	Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros; establece relaciones de orden empleando la recta Numérica en la solución de expresiones con operaciones combinadas, empleando	-Analizar sobre la utilización de números enteros. -Leer sobre la clasificación de los números Reales. Contestar las siguientes preguntas. - ¿Qué crees que es el Lenguaje Algebraico? - ¿Qué es una incógnita?	**Técnica:** -Evaluación. - Coevaluación. - Observación. -Taller pedagógico. **Instrumento:** - Resolución de ejercicios y problemas matemáticos.

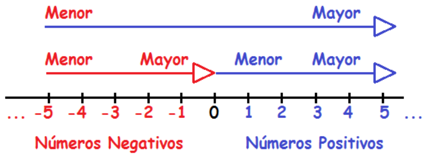
<table>
<tr>
<td>en las que se utilizan los números enteros negativos.</td>
<td>correctamente la prioridad de las operaciones; juzga la necesidad del uso de la tecnología. (Ref.I.M.4.1.1.).</td>
<td>
- ¿Qué conjunto de números representa la letra Z?
-Identificar números Z.


-Presen
-Estudia
-Solicitar que los estudiantes que realicen ejercicios matemáticos en el cuaderno u hojas que se encuentren en buen estado.
-Resolver ejercicios prácticos en base a ejercicios propuesto en el aula de clase.
-Realizar una tabla de doble entrada sobre la ley de signos.
-Ingresar al link y observar el video.
https://www.youtube.com/watch?v=5HE66809NYI


- Desarrollar la curiosidad y la creatividad para representar situaciones de la realidad mediante números enteros.
</td>
<td>
Técnica:
-Evaluación.
- Observación.
-Taller pedagógico.
Instrumento:
- Resolución de ejercicios y problemas matemáticos.
</td>
</tr>
</table>

M.4.1.1. Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.	Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros; establece relaciones de orden empleando la recta Numérica en la solución de expresiones con operaciones combinadas, empleando correctamente la prioridad de las operaciones; juzga la necesidad del uso de la tecnología. **(Ref.I.M.4.1.1.).**	-Comentar sobre la representación de números –z y +z. -Mencionar ejemplos en donde se utilicen números enteros positivos y negativos.  -Dialogar con los estudiantes sobre las temperaturas ambientales altas y bajas. -Explicar dos formas diferentes de cada una de las operaciones básicas mediante ejemplos básicos. -Transferir la resolución de números z con mediante el método deductivo a un nivel aplicativo. -Ampliar actividades para aplicar los contenidos y resolverlos en el cuaderno. -Reforzar los conocimientos mediante la formulación de talleres individuales. -Ejecutar trabajos en grupo para la retroalimentar de conocimientos adquiridos. $(6) - (5) = (6) + (-5) = 1$ $(-8) - (7) = (-8) + (-7) = -15$ $(-12) - (-15) = (-12) + (15) = 3$ $(8) - (-12) = (8) + (12) = 20$	**Técnica:** -Evaluación. - Coevaluación. - Observación. -Taller pedagógico. **Instrumento:** -Cuestionario de ejercicios propuestos. -Ficha de Observación -Lista de Cotejos.

	Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros; establece relaciones de orden empleando la recta numérica en la solución de expresiones con operaciones combinadas, empleando correctamente la prioridad de las operaciones; juzga la necesidad del uso de la tecnología. **(Ref.I.M.4.1.1.).**	-Reforzar el conocimiento ingresando al enlace. https://www.liveworksheets.com/w/es/matematicas/2212331 https://www.geogebra.org/m/n5cbsk96 - Analizar experiencias a través del dialogo simultaneo. -Formular preguntas a manera de lecciones que permitan activar conocimientos previos -Formular preguntas abiertas que permitan interiorizar, inferir y analizar propiedades. -Observar ejercicios presentados. -Analizar ejercicios presentados. -Conocer el proceso que se debe aplicar. -Indicar el orden de resolución de las operaciones matemáticas. -Resolver ejercicios aplicando el proceso. -Resolver ejercicios prácticos en base al texto del estudiante. -Ampliar actividades para aplicar los contenidos y resolverlos en el cuaderno. -Reforzar los conocimientos mediante la formulación de talleres propuestos. -Ejecutar trabajos en grupo para retroalimentar. -Observar la semirrecta numérica y compara las cantidades.	**Técnica:** -Prueba **Instrumento:** -Cuestionario -Actividades del texto -Taller individual extra clase -Ejercicios de aplicación

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números enteros y el planteamiento; juzga e interpreta las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. (REF. I.M.4.1.2)</td>
<td>

-Resolver ejercicios propuestos.


-Observar el video sobre las operaciones de números enteros. (Z)
https://www.youtube.com/watch?v=Sj9rThGLz9Q

https://www.geogebra.org/m/n5cbsk96

-Presentar ejercicios propuestos
-Realizar operaciones de números enteros utilizando la ley de los signos.
-observar ejercicios y completar con los números correctos.
-Solicitar a los estudiantes que realicen ejercicios matemáticos en el texto escolar.
a) $5-[7-2-(1-9)-3+12]+4=$
b) $1-(-3+6+1)-[4-(6-3+1)-2]=$
c) $6-(-9+7-1)-[3-(-5+4+6)-1]=$
d) $28-[21-(12-3)-7]=$
-Conocer el proceso que se debe aplicar para resolver ejercicios matemáticos.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

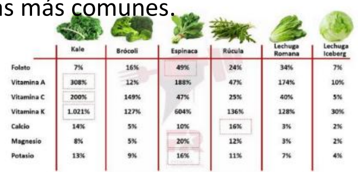
M.4.1.2. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros, utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, ≥). **M.4.1.3.** Operar en Z (adición, sustracción, multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación. **M.4.1.8.** Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.		-Difundir en el grupo de WhatsApp material visual para retroalimentar el conocimiento de los estudiantes. -Practicar ejercicios matemáticos en la plataforma virtual interactiva "quizizz". -Ingresar a los siguientes enlaces para fortalecer el conocimiento. **https://aulaprende.com/numeros-enteros/multiplicacion-de-numeros-enteros/** **https://www.youtube.com/watch?v=udGLCVQLdXU** https://www.geogebra.org/m/n5cbsk9	

APRENDIZAJE INTERDISCIPLINAR:			
NOMBRE DEL PROYECTO INTERDISCIPLINAR, EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE, RETO: “HUERTO ESCOLAR Y COCINA SALUDABLE”			
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE: Fomentar hábitos alimenticios saludables en la comunidad escolar mediante la creación y gestión de un huerto escolar, donde los estudiantes cultiven hortalizas y verduras para luego utilizarlas en la preparación de comidas nutritivas, promoviendo el aprendizaje sobre sostenibilidad, nutrición y cocina saludable.			
DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO	**INDICADORES DE EVALUACIÓN**	**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS ACTIVAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE**	**ACTIVIDADES EVALUATIVAS**
M.4.1.1. Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.	Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros; juzga la necesidad del uso de la tecnología. **(Ref.I.M.4.1.1.).**	-Estudiar ejercicios presentados mediante ejemplos. -Explicar dos formas diferentes cada una de las operaciones básicas de los números Z. -Resolver ejercicios empleando números +Z y –Z, de formar jerarquizada. -Difundir en el grupo de WhatsApp material visual. -Responder cualquier duda e inquietud por cualquier medio de comunicación.	**Técnica:** - Observación. -Investigación. **Instrumento:** - Planteamiento de ejercicios y problemas matemáticos.

-Reforzar los conocimientos mediante **Quizizz.**

-Investigar la clasificación de las plantas según su utilidad y escribir un resumen de cada uno.

-Realizar un cuadro comparativo sobre el porcentaje que posee las vitaminas y minerales de las verduras más comunes.



	Kale	Brócoli	Espinaca	Rúcula	Lechuga Romana	Lechuga Iceberg
Folato	7%	16%	49%	24%	34%	7%
Vitamina A	308%	12%	188%	47%	174%	10%
Vitamina C	200%	149%	47%	25%	40%	5%
Vitamina K	1.021%	127%	604%	136%	128%	30%
Calcio	14%	5%	10%	16%	3%	2%
Magnesio	8%	5%	20%	12%	3%	2%
Potasio	13%	9%	16%	11%	7%	4%

ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECÍFICAS: En esta sección se plasman las estrategias dirigidas a los estudiantes con necesidades educativas específicas ligadas o no a la discapacidad.

ADAPTACIONES CURRICULARES GRADO II

ESTUDIANTE: B.C.A.F **TIPO DE NECESIDAD EDUCATIVA ESPECIAL: VULNERABILIDAD NO ASOCIADA A UNA DISCAPACIDAD**

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS ACTIVAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE	ACTIVIDADES EVALUATIVAS
• Brindar un acompañamiento pedagógico fomentando una comunicación positiva con el estudiante, resaltando sus logros y esfuerzos en el proceso de aprendizaje, mediante elogios, felicitaciones, reconocimientos, etc., de forma individual o grupal.	**Técnica:** -Evaluación. - Coevaluación. - Observación. -Taller pedagógico. -Investigación.

• Promover el desarrollo de su autoestima, mediante el apoyo permanente y significativo del Docente principalmente cuando se presenten dificultades en el proceso educativo. • Permitir tiempo extra para la realización de actividades escolares, deberes y evaluaciones si lo amerita. • Brindarle apoyo cuando lo requiera de manera individual en coordinación con la representante legal • Realizar el proceso de refuerzo académico en los temas que presenta mayor dificultad. • Sensibilizar al padre, madre y/o representante legal sobre la importancia de establecer rutinas, normas, reglas, límites y hábitos en el hogar, con el fin de promover una mayor autonomía por parte del estudiante, así como también el proveer de un ambiente familiar tranquilo y estable en casa, libre de violencia, que favorezca el proceso de aprendizaje de su representado. • Si se requiere hacer llamados de atención o correcciones al estudiante, hacerlo de forma individual, evitando realizarlo delante del resto de compañeros. • Promover y orientar al estudiante en la resolución pacífica de conflictos, cuando estos surgen en la interrelación con sus compañeros. • Estar pendientes del estado emocional del estudiante y comunicar inmediatamente al DECE si se evidencian cambios repentinos a nivel académico, emocional, comportamental y sociabilidad o inasistencias a clases sin justificación.	**Instrumento:** - Resolución de ejercicios y problemas matemáticos. - Planteamiento de ejercicios y problemas matemáticos.
ADAPTACIONES CURRICULARES GRADO I **ESTUDIANTE:** (Ubicar primero apellidos luego nombres) **TIPO DE NECESIDAD EDUCATIVA ESPECIAL:** CONDICION DE VULNERABILIDAD	

ESTRATEGIAS DE ACCESO UTILIZADAS CON EL ESTUDIANTE

Observación:

……

ELABORADO	REVISADO	APROBADO	APROBADO
Lcda. Myrian Nole Docente	Lcda. Fernando Ordoñez Coordinador	Lcdo. Franklin Suntasig DECE	Lcda.Gloria Panata Directora
Fecha: 14/10/2024	Fecha:	Fecha:	Fecha:

Anexo 2. Evaluación diagnóstica

Evaluación Diagnóstico

Nombre del estudiante: _______________________

Curso: Octavo A☐/Octavo B☐/ Octavo C☐

Edad: ________

Sexo: Femenino☐/Masculino☐

Fecha: _____________________

Instrucciones:

Lee con atención cada pregunta y marca con una “X” la opción que consideres correcta. No es necesario escribir tu nombre completo. Esta encuesta se usará solo con fines educativos, para conocer cómo aprendes y cómo podemos ayudarte mejor. No afecta tus calificaciones.

Sección: Comprensión de Números Enteros

1. **¿Qué número está más a la izquierda en la recta numérica?**

   ☐3

   ☐ 0

   ☐ **-5**

   ☐ 10

2. **¿Cuál de estos números es menor?**

   ☐ **-8**

   ☐ -2

   ☐ 0

   ☐ 5

3. **Si estás en el número -2 y avanzas 5 espacios hacia la derecha en la recta numérica, ¿dónde terminas?**

   ☐ **En el 3**

   ☐ En el -3

   ☐ En el 7

   ☐ En el 0

4. **¿Cuál es el resultado de la operación -4 + 6?**

   ☐ -10

   ☐ **2**

☐ -2

☐ 0

5. **¿Qué resultado da la operación -7 + (-3)?**

☐ -4

☐ 10

☐ **-10**

☐ 0

6. **¿En qué situación usarías un número negativo?**

☐ Al contar cuántos lápices hay en una caja

☐ **Al calcular una deuda de dinero**

☐ Al sumar manzanas

☐ Al medir la altura de una persona

7. **¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?**

☐ -1 es mayor que 0

☐ -10 es mayor que -2

☐ **3 es mayor que -5**

☐ 0 es mayor que 5

8. **Si tienes -5 y le sumas 0, ¿qué número obtienes?**

☐ **-5**

☐ 0

☐ 5

☐ 10

9. **¿Qué operación representa "retroceder 4 pasos desde el 2"?**

☐ 2 + 4

☐ **2 - 4**

☐ -2 + 4

☐ 4 – 2

10. ¿Cuál de estas rectas numéricas está ordenada correctamente de menor a mayor?

☐ **-5, -3, 0, 2, 4**
☐ 4, 2, 0, -3, -5
☐ 0, -1, -2, -3, -4
☐ -1, -2, -3, 0, 1

Anexo 3. Evaluación final

Nombre del estudiante: ________________________

Curso: Octavo A ☐ / Octavo B ☐ / Octavo C ☐

Edad: ________

Sexo: Femenino ☐ / Masculino ☐

Fecha: ______________________

Instrucciones:

Lee con atención cada pregunta y marca con una "X" la opción que consideres correcta. No es necesario escribir tu nombre completo. Esta evaluación se usará solo con fines educativos, para conocer cómo aprendes y cómo podemos ayudarte mejor. No afecta tus calificaciones.

Sección: Comprensión de Números Enteros

1. ¿Qué número está más a la izquierda en la recta numérica?

☐ 4

☐ 0

☐ -6

☐ 9

2. ¿Cuál de estos números es menor?

☐ -3

☐-12

☐ 0

☐ 8

3. Si estás en el número -4 y avanzas 7 espacios hacia la derecha en la recta numérica, ¿en qué número terminas?

☐ 3

☐ -3

☐ 11

☐ 0

4. ¿Cuál es el resultado de la operación -5 + 9?

☐ -14

☐ 4

☐ -4

☐ 0

5. ¿Qué resultado da la operación -8 + (-5)?

☐ -3

☐ 13

☐ -13

☐ 0

6. ¿En cuál de estas situaciones usarías un número negativo?

☐ Para contar frutas en una canasta

☐ Para indicar una temperatura bajo cero

☐ Para sumar edades de un grupo

☐ Para calcular distancias positivas

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

☐ -2 es mayor que 1

☐ -15 es mayor que -7

☐ 5 es mayor que -9

☐ 0 es mayor que 10

8. Si tienes -9 y le sumas 0, ¿qué número obtienes?

☐ -9

☐ 0

☐ 9

☐ 18

9. ¿Qué operación representa “retroceder 6 pasos desde el 1”?

☐ 1 + 6

☐ 1 - 6

☐ -1 + 6

☐ 6 – 1

10. ¿Cuál de estas rectas numéricas está ordenada de menor a mayor?

☐ -7, -4, -1, 2, 5

☐ 5, 2, -1, -4, -7

☐ 0, -2, -4, -6, -8

☐ 2, 0, -2, -4, -6

Anexo 4. Entrevista aplicada a docentes

Guía de encuesta para docentes

Objetivo: Recoger la percepción de los docentes sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes con los números enteros, sus estrategias actuales de enseñanza y su experiencia o visión sobre el uso de herramientas digitales como GeoGebra.

Datos generales del docente (para uso interno):

Nombre : ___________________________

Edad: _______

Años de experiencia docente: _______

Asignatura que imparte: ______________________

Paralelo(s): _________________________________

Preguntas de la entrevista

1. Desde su experiencia en el aula, ¿cuáles cree que son las principales dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con números enteros?
2. ¿Qué estrategias o métodos ha utilizado usted para enseñar este tema? ¿Ha sentido que funcionan?
3. ¿Ha notado si hay algún patrón en los errores o confusiones más frecuentes de los estudiantes con este contenido?
4. ¿Cómo reaccionan los estudiantes frente al tema de los enteros? ¿Lo reciben con interés, con miedo, con desmotivación?
5. En su opinión, ¿qué tipo de actividades o recursos podrían facilitar la comprensión de los números enteros?
6. ¿Conoce la herramienta digital GeoGebra? ¿La ha utilizado alguna vez en sus clases? Si la respuesta es no, ¿ha oído hablar de ella?
7. ¿Cree que una herramienta como GeoGebra puede aportar algo distinto o valioso a la enseñanza de este tema en particular?
8. ¿Qué ventajas y qué limitaciones cree que tendría usar una herramienta digital en el aula con sus estudiantes?
9. Durante la implementación de actividades con GeoGebra, ¿notó alguna diferencia en la participación o comprensión de los estudiantes?
10. Si tuviera la posibilidad de incorporar herramientas como esta de manera permanente, ¿lo haría? ¿Por qué sí o por qué no?